Energiebilanz eines Gletscherbaches

Diplomarbeit für Meteorologie

von

Waldemar Gereke

Ludwig - Maximilians - Universität

München

September 1985

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gebietsbeschreibung	2
3	Ausgangsdaten	4
4	Koordinatensysteme	5
5	Kanalmodell	6
5.1	Energiebilanzgleichung	6
5.2	Strahlungsbilanz	7
5.2.1	Solare Strahlung	7
5.2.1.1	Globalstrahlung	7
5.2.1.2	Reflexstrahlung	12
5.2.1.3	Unterlicht	13
5.2.2	Terrestrische Strahlung	14
5.2.2.1	Gegenstrahlung	14
5.2.2.2	Ausstrahlung	15
5.3	Strom fühlbarer Wärme	16
5.4	Strom latenter Wärme	19
5.5	Energiedissipation	21
5.6	Gerinnehydraulik	24
5.6.1	Geometrie	25
5.6.2	Kennzahlen	25
5.6.3	Energiehöhen	26
5.6.4	Fließformeln	27
5.6.4.1	Rohrströmung	27
5.6.4.2	Gerinneströmung	29
5.7	Abschattung	34
5.8	Ergebnisse des Kanalmodells	39
6	Trapezprofilmodell	42
6.1	Bachbettprofilierung, Dispersionsansatz	42
6.2	Bodenwärmestrom	48
6.2.1	Harmonische Analyse	49
6.2.2	Methode mit der Errorfunktion	53
6.2.3	Konforme Abbildung des Bachbettprofils	68
6.2.4	Bodenwärmestrom bei ebener Oberfläche	75
6.2.4.1	Thermodynamik im Vollraum	76
6.2.4.2	Wärmeströme im Halbraum	80

6.3 Ergebnisse des Trapezprofilmodells 88
7 Anhang A1
7.1 Errorfunktion, Exponentialintegral A1
7.2 Anwendungsbeispiel der konformen Abbildung A4
7.3 Ausgangsdaten und Ergebnisse in Zahlen A9
7.4 Symbolliste A15
7.5 Literaturverzeichnis A21

Tabellenverzeichnis

1 Topographische Daten des Bachsystems 4
2 Trübungsfaktor $\hat{T}$ als Monatsmittelwert und $\bar{\hat{T}}$ im Jahresdurchschnitt; Schulze,1970 8
3 Reflexion der direkten Sonnenstrahlung an einer horizontalen Wasseroberfläche in Prozent der einfallenden Strahlung; Eckel u.Reuter,1950 12
4 Gradienten der Lufttemperatur über Vorfeld und Gletscher in K/100m; Escher-Vetter,1980 18
5 Äquivalente Sandrauhigkeiten für verschiedene Oberflächen; Schröder,1968 31
6 Fließgeschwindigkeiten des Baches Nr.7 33
7 Bachbreiten im Kanalmodell 40
8 Werte der Errorfunktion für $\varkappa = 0.00432 \frac{m^2}{h}$ 60
9 Trapezprofilparameter der Bäche 88
10 Konforme Abbildung einer vertikalen Kanalwand A6
11 Konforme Abbildung einer horizontalen Wand A7
12 Meteorol.Daten an der Pegelstation am 19.8.78 A9
13 Gemittelte Energiebilanzterme A10
14 Tiefen der Bäche am Ende ihres Verlaufs A11
15 Bachsohlenbreiten im Trapezprofilmodell A13
16 Berechnete Wassertemperaturen A14

Numerierung der Abbildungen: Seite, Bild dieser Seite
Numerierung der Formeln und Tabellen: fortlaufend

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Tagesgang der Wassertemperatur eines Gebirgsbachsystems berechnet, wobei zunächst in Anlehnung an andere Arbeiten über Flußtemperaturen die Energiebilanzen der Bäche mit kanalförmigen Bettprofilen aufgestellt werden. Dieses Kanalmodell vernachlässigt den Bodenwärmestrom, berücksichtigt aber lokale Effekte des Bachverlaufs wie variable mittlere Fließgeschwindigkeiten und veränderte Strahlungsbilanzen durch Abschattung.

Sodann werden die Kanalprofile zu trapezförmigen Bachbettprofilen mit zum Ufer hin abnehmenden Fließgeschwindigkeiten erweitert.

Schwerpunkt der Arbeit ist die Entwicklung einer Berechnungsmethode für den Bodenwärmestrom, welche neben der konformen Abbildung der Bachbettprofile auf der Gauß'schen Errorfunktion basiert. Die Errorfunktion wird dazu verwendet, um die Temperatur- und Energieverteilungen im Erdinneren in Abhängigkeit von Temperatur- und Energiebilanzvariationen an der Bodenoberfläche zu berechnen. An mehreren Beispielen wird verifiziert, daß dieses Verfahren als Alternative zur harmonischen Analyse zulässig ist.

1 Einleitung

Einer der intensiv untersuchten Alpengletscher ist der Vernagtferner, der in den Ötztaler Alpen nahe der Ortschaft Vent in Tirol, Österreich zu finden ist.

Die frühesten wissenschaftlichen Arbeiten an diesem Objekt befassten sich mit geodätisch - kartographischen Aufgaben und führten 1888/89 zur Errichtung eines Festpunktnetzes im Vernagtgebiet durch S.Finsterwalder, der auch die erste Karte des Gletschers anfertigte. Jährliche Vermessungen der Zungenposition gaben seit dieser Zeit Aufschluß über die Eisbewegung.

Mit dem Beginn von Niederschlagsbeobachtungen setzte im Jahr 1927 eine neue Phase der Gletscherforschung ein. Jedoch erst um 1965 erlaubten ständige Messungen der Massenbilanz, der Flächen- und Volumenänderung sowie anderer Größen eine umfangreiche Kontrolle des Gletschers.

Im Sommer 1973 wurden mit dem Bau einer Pegelstation die Voraussetzungen für eine erhebliche Ausweitung des Vernagtprogrammes geschaffen. Dieses umfaßte in den folgenden Jahren neben den standardmäßigen Aufzeichnungen der Meßgrößen zur Ermittlung des Massenhaushaltes, des Abflußes und der meteorologischen Daten auch zahlreiche Sonderprogramme, so vor allem Bohrungen und Markierungsversuche.

In der vorliegenden Arbeit soll nun die Wassertemperatur des Vernagtbaches während eines Tages berechnet und mit den gemessenen Temperaturen verglichen werden. Dazu werden nicht nur an der Pegelstation gewonnene meteorologische Meßwerte herangezogen, sondern ebenso einige Ergebnisse von Sonderuntersuchungen des Gletschervorfeldes verwendet.

2 Gebietsbeschreibung

Das Untersuchungsgebiet ist das in Bild 3,1 gezeigte Vorfeld des Vernagtferners. Dieser Gletscher, der in der Höhenlage von 2747m bis 3833m eine Fläche von 9.6 km^2 bedeckt, speist ein siebenarmiges Bachsystem, das sich in 650m Entfernung vom Zungenende zu einem einzigen Bach, dem Vernagtbach, vereinigt. Nach weiteren 450m Fließlänge erreicht der Bach die in Bild 3,2 gezeigte Pegelstation.

Das Vorfeld ist die Sohle des im letzten Jahrhundert viel weiter vorgestoßenen Gletschers und daher ein vollkommen mit Steinen bedecktes U-Tal. Abbildung 2,1 zeigt Teile des Gletschers sowie sein Bachsystem mit Höhenangaben an den Austrittsorten der durchnumerierten Einzelbäche.

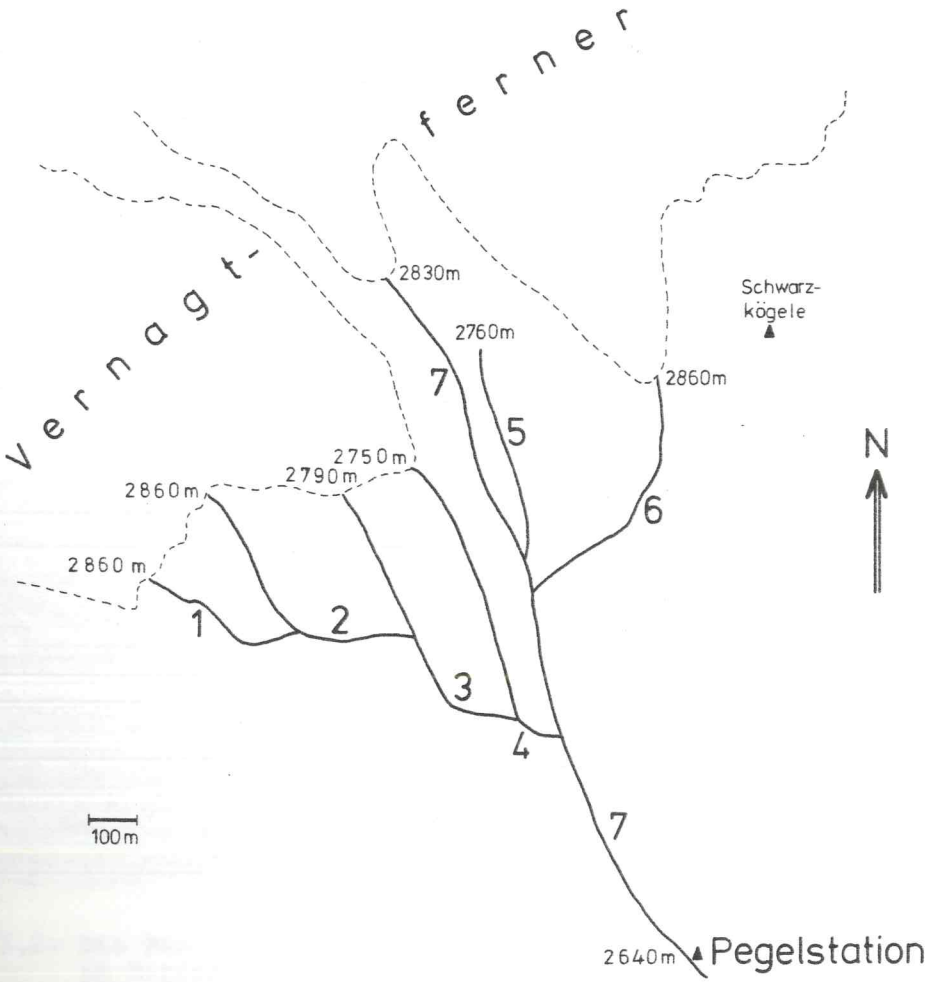


Abb.2,1: Das Vorfeld des Vernagtferners

Abb.3,1: Das Vorfeld des Vernagtferners. Blick vom Schwarzkögele in Richtung Süd-Südwest

Abb.3,2: Die Pegelstation Vernagtbach. Blick nach Norden. Im Hintergrund die Gletscherzunge. Titelfoto aus: "Pegelstation Vernagtbach 1973-1983", herausgegeben von der Kommission für Glaziologie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

3 Ausgangsdaten

Als Ausgangsdaten werden verwendet die am 19.8.1978 an der Pegelstation registrierten Werte der Globalstrahlung G , der Gegenstrahlung A, der Lufttemperatur ϑ_L , der relativen Luftfeuchte f_L , der Windgeschwindigkeit v_L , der Abflußmenge DM und der Wassertemperatur ϑ_W. Die Instrumente sind im näheren Umfeld bzw. in der Pegelstation installiert und registrieren kontinuierlich. Das zur Berechnung der Wassertemperatur erstellte Rechenprogramm hat aber solch großen Speicherplatzbedarf, daß eine Beschränkung auf gemittelte Stundenwerte notwendig ist. Diese sind in Tabelle 12 auf Seite A9 zusammengefaßt.

Nicht registriert wird die Temperatur und Wasserführung der sieben einzelnen Bäche des Bachsystems. Es existiert lediglich eine einzige Messung der Wasserführung an drei ausgewählten Zusammenflüssen, die am 23.7.1976 im Rahmen der hydrologischen Erfassung des Gletschervorfeldes durchgeführt wurde. Damit kann rückwirkend die Verteilung der registrierten Gesamtwasserführung DM auf jeden Bach zum Zeitpunkt der Messung angegeben werden. Obwohl diese Verteilung sicher nicht konstant ist, soll sie mangels weiterer Messungen für die Berechnung herangezogen werden. Der relative Wasseranteil und andere charakteristische Daten der Bäche sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Topographische Daten des Bachsystems

Bach-nummer	Länge	Höhen-diff.	Gefälle	rel.Wasser-anteil	Integr.-schritte
1	340 m	60 m	0.177	10.5 %	7
2	460 m	110 m	0.239	10.5 %	9
3	600 m	100 m	0.167	10.5 %	12
4	670 m	70 m	0.105	10.5 %	13
5	350 m	50 m	0.143	6.5 %	7
6	620 m	160 m	0.258	45.0 %	12
7	1580 m	190 m	0.120	6.5 %	30

Tabelle 1 gibt auch die Anzahl der Integrationsschritte für jeden Bach an. Ein Integrationsschritt ist ein Abschnitt der Fließstrecke

mit 50m Länge, in welchem sämtliche die Wasertemperatur bestimmenden Parameter als konstant angenommen werden.

4 Die Koordinatensysteme

Das Kanalmodell wie auch das Trapezprofilmodell wird im mitgeführten Koordinatensystem berechnet. Dies bedeutet, daß ein aus dem Gletscher tretendes Wasserpaket als talwärts fließende Einheit angesehen wird und als solche seine Temperatur während der Fließzeit ändert. Eine Modifikation dieses Ansatzes beschreibt Kapitel 6.1 .

Das mit dem Wasserpaket bewegte Koordinatensystem weist mit der y-Achse in Fließrichtung, die z-Achse zählt positiv nach oben und die x-Achse wird positiv in Fließrichtung links. Die konforme Abbildung in Kapitel 6.2.3 transformiert das Bachbett vom x,y,z-Koordinatensystem in ein u,v,w-Koordinatensystem mit gleicher räumlicher Orientierung, wie Abbildung 5,1 zeigt.

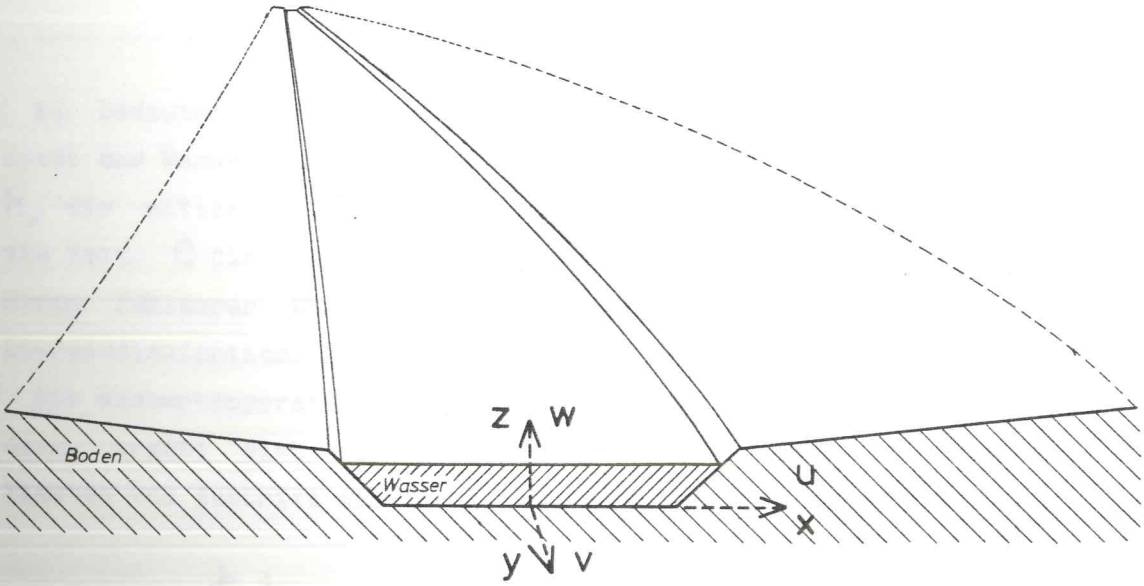


Abb.5,1 : Koordinatensysteme des Kanal- und Trapezprofilmodells

In Kapitel 5.7 wird zur Berechnung der Abschattung ein stationäres Koordinatensystem mit frei wählbarem Ursprung verwendet, dessen x-Achse nach Osten, y-Achse nach Süden und z-Achse nach oben zeigt.

5 Kanalmodell

Als Kanalmodell wird derjenige vollständige Satz von Gleichungen bezeichnet, welcher zur Berechnung der Wassertemperatur in einem Bachbett mit vertikalen Wänden und ebenem Boden benötigt wird. Dabei soll die Fließgeschwindigkeit V_W über die gesamte Bachbreite $2b$ konstant und gleich der mittleren Fließgeschwindigkeit $\bar{V}_W$ sein, es findet also keine Geschwindigkeitsdispersion statt. In jedem Integrationsabschnitt differieren aber, bedingt durch verschiedene Sohlenneigungswinkel und Fließquerschnitte, die mittleren Fließgeschwindigkeiten $\bar{V}_{W,i}$ voneinander, wie in Kapitel 5.6 noch gezeigt wird.

5.1 Die Energiebilanzgleichung

Die Temperaturänderung eines talabwärts driftenden Wasserpaketes berechnet sich nach der Energiebilanzgleichung zu

$$\rho_W c_W \bar{h}_W O \frac{dT_W}{dt} = O(Q+B+L+V+P) . \qquad [1]$$

Es bedeuten ρ_W die Dichte des Wassers, c_W die spezifische Wärmekapazität des Wassers, O die Grenzfläche Wasser-Luft des Wasserpaketes, $\bar{h}_W$ die mittlere Tiefe des Wasserpaketes, T_W die Wassertemperatur, t die Zeit, Q die Strahlungsbilanz, B den Bodenwärmestrom, L den Strom fühlbarer Wärme, V den Strom latenter Wärme und P die Energiedissipation.

Die Wassertemperatur an einem gewünschten Punkt, etwa einer Einmündung, ergibt sich daraus durch Integration über die Laufzeit des Paketes vom Austritt aus dem Gletscher bis zu diesem Punkt:

$$T_W = \int_{t_G}^{t_P} \frac{1}{\rho_W c_W \bar{h}_W} (Q+B+L+V+P)\, dt + T_{W,0} . \qquad [2]$$

$T_{W,0}$ ist die meßbare Austrittstemperatur, die am Gletscherrand zu 273,15K angenommen wird. Im weiteren ist für „T" die Temperatur in Kelvin, für „ϑ" in °C einzusetzen.

Viele Autoren, die Flußtemperaturen berechnet haben, schätzen für

den schwer faßbaren Bodenwärmestrom einen relativ zu den anderen Energiestromdichten geringen Wert oder vernachlässigen ihn völlig. So wird auch hier im Kanalmodell eine Berechnung des Bodenwärmestroms nicht durchgeführt.

5.2 Die Strahlungsbilanz Q

Die Nettostrahlungsflußdichte Q ist die Bilanz sämtlicher auf die Oberfläche O des Wasserpaketes fallenden kurz- und langwelligen Strahlungsströme

$$Q = I + H - R + A - E \quad [3]$$

Hierbei ist I die direkte solare Strahlung, H die diffuse Himmelsstrahlung, R die Reflexstrahlung, A die atmosphärische Gegenstrahlung und E die Ausstrahlung des Wassers.

Als Meßwert an der Pegelstation ist lediglich die Globalstrahlung $G = I + H$ und die Gegenstrahlung A bekannt, jedoch ist es offensichtlich, daß zur Berücksichtigung der Abschattung die Kenntnis von I und H einzeln notwendig ist. Um diese Trennung zu erreichen, wird ein in Beier,Obermeier,Somieski,1981 beschriebenes Verfahren angewendet, welches im folgenden Kapitel dargelegt wird.

5.2.1 Solare Strahlung

5.2.1.1 Globalstrahlung

Die Zerlegung der gemessenen Globalstrahlung G in ihre Komponenten I und H geht von einer maximal möglichen direkten Sonnenstrahlung I_{max} bei wolkenlosem Himmel aus, die für diesen Meßort eindeutig bestimmbar und zusammen mit der aus I_{max} berechneten maximal möglichen diffusen Himmelsstrahlung H_{max} eine Globalstrahlung G_{max} ergibt. Der Vergleich von G_{max} mit G und die Berücksichtigung des Sonnenstandes, der Sonnenscheindauer und der Trübung führen dann auf die gewünschten Werte für I und H.

Um die maximal mögliche direkte Sonnenstrahlung I_{max} auf eine horizontale Fläche berechnen zu können, ist die Kenntnis der extrater-

restrischen solaren Strahlung I_e erforderlich. I_e schwankt um einen Mittelwert, die Solarkonstante 1360 W/m², und wird nach Beier, Obermeier, Somieski, 1981 mit der Formel

$$I_e = 1360\,(1 - 0{,}03 \sin(3{,}8\,\delta_\odot)) \qquad [4]$$

an die tabellierten Werte von I_e aus Foitzik, Hinzpeter, 1958 angepaßt. Die Deklination der Sonne $\delta_\odot$ wird im Bogenmaß eingesetzt, I_e ergibt sich in W/m².

Beim Durchgang durch die Atmosphäre wird die Sonnenstrahlung geschwächt. Für die Strahlung, die auf eine senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung angeordnete Fläche fällt, wird dann die Gleichung

$$I_S = I_e\, e^{-\frac{\hat{b}\,\hat{T}}{\sin h_\odot}} \qquad [5]$$

verwendet. Den Extinktionskoeffizienten $\hat{b}$ geben Beier, Obermeier, Somieski, 1981 mit

$$\hat{b} = 0{,}044 + 0{,}065\, e^{-\frac{0{,}18}{\sin h_\odot}} \qquad [6]$$

an, wobei $h_\odot$ die Sonnenhöhe bedeutet. Der Linke'sche Trübungsfaktor $\hat{T}$ wird der in Schulze, 1970 enthaltenen Tabelle 2 entnommen.

Tab.2: Trübungsfaktor $\hat{T}$ als Monatsmittelwert und $\bar{\hat{T}}$ im Jahresdurchschnitt, Schulze 1970

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\bar{\hat{T}}$
Gebirge	1.8	1.9	2.1	2.2	2.4	2.7	2.7	2.7	2.5	2.1	1.9	1.8	2.15
Land	2.1	2.2	2.5	2.9	3.2	3.4	3.5	3.3	2.9	2.6	2.3	2.2	2.76
Stadt	3.1	3.2	3.5	3.9	4.1	4.2	4.3	4.2	3.9	3.6	3.3	3.1	3.70

Schließlich ergibt die Projektion von I_S auf eine horizontale Fläche die maximal mögliche direkte Sonnenstrahlung I_{max}, wenn die Sonne nicht von Wolken verdeckt ist,

$$I_{max} = I_S \sin h_\odot \,. \qquad [7]$$

Die maximal mögliche diffuse Himmelsstrahlung H_{max} kann dann mit dem

Ansatz

$$H_{max} = l' \; I_{max} \qquad [8]$$

dargestellt werden. l' als Funktion der Trübung und der Sonnenhöhe wird näherungsweise aus der Formel

$$l' = 0{,}043 \, \frac{\hat{T}}{\sin h_{\odot}} \qquad [9]$$

bestimmt. Mit

$$G_{max} = I_{max} + H_{max} \qquad [10]$$

ist dann die maximal mögliche Globalstrahlung auf eine horizontale Fläche bei wolkenlosem Himmel bekannt.

Ein Maß für den Einfluß der Bewölkung ist die relative Sonnenscheindauer $s_{\odot}$. Sauberer u.Dirmhirn,1955 geben Werte für die Tagessummen der direkten Sonnenstrahlung in Abhängigkeit von $s_{\odot}$ an. Sollen diese Angaben für beliebige Tageszeiten gelten, dann ist die Gleichung

$$I = g_s \, I_{max} \quad ; \quad g_s = 0{,}6 s_{\odot} + 0{,}4 s_{\odot}^2 \qquad [11]$$

eine Annäherung an diese Werte.

Ist die relative Sonnenscheindauer $s_{\odot}$ nicht als Meßwert bekannt, dann läßt sie sich aus dem Vergleich von G_{max} mit dem gemessenen G errechnen. Nach Sauberer u.Dirmhirn,1955 gilt näherungsweise

$$\frac{G}{G_{max}} = \tilde{n} = 0{,}35 + 0{,}65 s_{\odot} - \frac{0{,}1}{20 s_{\odot} + 1} \qquad [12]$$

mit der Umkehrfunktion

$$s_{\odot} = 0{,}763 \, [\tilde{n} + (\tilde{n}^2 - 0{,}634 \tilde{n} + 0{,}114)^{\frac{1}{2}}] - 0{,}292 \, , \qquad [13]$$

so daß damit auch $s_{\odot}$ bekannt ist.

Den Einfluß der Bewölkung auf die diffuse Himmelsstrahlung beschreiben Beier,Obermeier,Somieski,1981 mit

$$H = (l' + \tilde{w}) \, I_{max} \quad ; \quad \tilde{w} = 0{,}3 \sin[\pi (s_{\odot} + 0{,}25)] + 0{,}36 s_{\odot} - 0{,}15 \qquad [14]$$

Diese Gleichung nähert wieder tabellierte Werte von Tagessummen der Himmelsstrahlung bei Bewölkung in Sauberer u.Dirmhirn,1955 an. Auf diese Weise gelingt es, auch ohne einen Meßwert für $s_{\odot}$ die Globalstrahlung G in ihre Komponenten I und H zu zerlegen.

Berechnung des Einfallswinkels $\omega_\odot$ der direkten Sonnenstrahlung I auf die Oberfläche des Wasserpaketes

Das Wasserpaket fließe mit konstanter Geschwindigkeit im Bachbett talabwärts. Werden diejenigen Stellen, an denen wegen größerer Wassertiefen durch lokalen Stau die Fließgeschwindigkeit auf sehr kleine Werte zurückgeht und sich deswegen eine horizontale Oberfläche einstellt, außer acht gelassen, dann kann man die Wasseroberfläche während des gesamten Fließvorganges als parallel zur Bachsohle annehmen. Die Oberflächennormale wird damit durch die Neigung η_H und die Richtung ν_H der Bachsohle eindeutig bestimmt. Die Neigung η_H läßt sich aus einer Orthophotokarte des Vernagtferners mit Hilfe der Höhenlinien leicht bestimmen, die Richtung ν_H stimmt mit der Fließrichtung überein und wird folgendermaßen definiert:

Fließrichtung:	Nord	West	Süd	Ost	Nord
ν_H :	180° - 0°	90°	0°	-90°	-180° + 0°

Nun wird der Sonnenstand in Polarkoordinaten für beliebige Tageszeiten bestimmt. Die Sonnenhöhe $h_\odot$ über einer horizontalen Fläche folgt aus

$$\sin h_\odot = \sin\psi \sin\delta_\odot + \cos\psi \cos\delta_\odot \cos\tau_t \qquad [15]$$

Es ist ψ die geographische Breite, hier 46.8°, $\delta_\odot$ die Sonnendeklination und mit der Tagesstunde t wird der Tageswinkel

$$\tau_t = \left(\frac{t}{12} - 1\right)\pi \, .$$

Die Deklination $\delta_\odot$ wird, z.B. nach Hofmann, 1978 als

$$\delta_\odot = 23{,}3 \cos[\lambda_t + 190] + 0{,}4 \cos[2(\lambda_t + 94)] + 0{,}2 \cos[3(\lambda_t + 70)] + 0{,}4 \qquad [16]$$

berechnet, wobei

$$\lambda_t = 30{,}1\, M + 0{,}985\, D - 32 \qquad [17]$$

der Jahreswinkel ist. Die Monatszahl M beginnt mit dem März als erstem Monat, D ist der Tag im Datum. Als Sonnenazimut wird

$$\cos(Az) = \frac{-\cos\psi \sin\delta_\odot + \sin\psi \cos\delta_\odot \cos\tau_t}{\cos h_\odot} \qquad [18]$$

verwendet. Damit folgt für den Einfallswinkel $\omega_\odot$ auf die geneigte Wasseroberfläche

$$\cos \omega_{\odot} = \cos z_{\odot} \cos \eta_H + \sin z_{\odot} \sin \eta_H \cos(Az - \nu_H) \qquad [19]$$

mit der Zenitdistanz

$$z_{\odot} = \frac{\pi}{2} - h_{\odot} \quad . \qquad [20]$$

Abbildung 11,1 zeigt einige dieser Größen am Beispiel eines nach Süd-Südost fließenden Bachabschnittes.

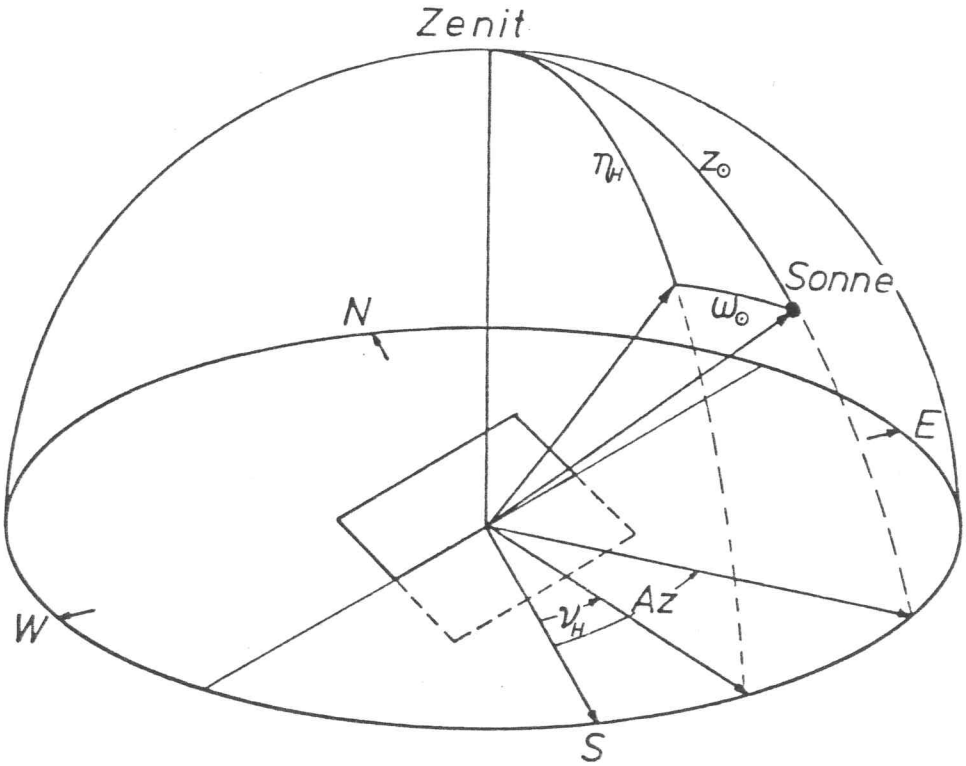


Abb.11,1: Einfallswinkel $\omega_{\odot}$ der Strahlung I auf eine geneigte Fläche nach Escher-Vetter,1980

5.2.1.2 Reflexstrahlung

Ein Teil der auf die Wasseroberfläche fallenden direkten solaren Strahlung I wird nun, abhängig vom Einfallswinkel $\omega_\odot$ und der Oberflächenbeschaffenheit, als Reflexstrahlung reflektiert. Die Wasseroberfläche wird im allgemeinen eine bewegte, rauhe und zum Teil mit Gischt bedeckte Fläche sein. Die folgende Tabelle 3 zeigt die von Büttner u.Sutter gemessene Reflexstrahlung in Prozent der einfallenden Strahlung über rauher Wasseroberfläche im Gegensatz zur von Schmidt theoretisch berechneten Reflexstrahlung über glatten Flächen.

Tabelle 3: Reflexion der direkten Sonnenstrahlung I an der horizontalen Wasseroberfläche in Prozent der einfallenden Strahlung aus Eckel u.Reuter,1950

Sonnenhöhe $h_\odot$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°,90°
glatte Fläche	100	34.79	13.25	5.97	3.36	2.45	2.14	2.06	2.04
rauhe Fläche	100	46.0	25.0	15.4	9.5	7.5			

Als eigene Approximation an die Werte von Büttner u.Sutter soll die Formel gelten:

$$R = I\,(1 - 0{,}94 \tanh(0{,}05\, h_\odot)) \qquad [21]$$

wobei $h_\odot$ im Bogenmaß einzusetzen ist. Gleichung [21] gilt bis $h_\odot = 90°$.

Die Reflexion der diffusen Himmelsstrahlung H an rauher Wasseroberfläche ist erheblich weniger variabel, weil H hier als ungerichtete Größe angesehen werden kann, und wird für Sonnenhöhen um 30° mit 4%, für Sonnenhöhen größer als 60° mit 2% angegeben, so daß mit 3% ein akzeptabler Mittelwert gewählt wird.

5.2.1.3 Unterlicht

Als Unterlicht wird hier derjenige Anteil der ins Wasser eindringenden solaren Strahlung bezeichnet, der wegen Streuung im Wasser und Reflexion am Gewässerboden wieder in die Atmosphäre austritt. Eine Folge des Unterlichtes ist die Sichtbarkeit der Bachsohle und darauf liegender ganz mit Wasser bedeckter Steine.

Wesentlich für die Bestimmung des Unterlichtes ist der Extinktionskoeffizient des Wassers, der sowohl mit der Wellenlänge der einfallenden Strahlung als auch mit dem Reinheitsgrad des Wassers variiert, und die Gewässertiefe. Nach Geiger,1961 läßt sich die Absorbtion solarer Strahlung in einem klaren Fließgewässer zu 74 - 97 % je Meter Wassertiefe, im trüben Fließgewässer zu 90 - 100 % je Meter Tiefe abschätzen. Bei Übertragbarkeit auf einen 10 cm tiefen Gletscherbach sollten etwa 90 % der direkt unter der Wasseroberfläche vorhandenen solaren Strahlung den Bachboden erreichen. Die Streuung bei dieser geringen Tiefe wird als vernachlässigbar klein angesehen.

Setzt man mit Witte,1982 die Albedo des Gewässerbodens zu 30 % an, dann werden mit Bezug auf Tabelle 3 je nach Sonnenhöhe 0 - 30 % der solaren Strahlung vom Bachboden reflektiert.

Dies gilt für eine ruhige Wasseroberfläche. Tatsächlich sind aber die Oberflächen der Bäche dauernd turbulent und die Tiefen sehr variabel, wodurch eine Berechnung des Unterlichts derart erschwert wird, daß auf seine Berechnung ganz verzichtet wird. Stattdessen soll das Unterlicht in der Reflexstrahlung enthalten sein und nach Böhm,1973 mit 5% der auf die Wasseroberfläche einfallenden solaren Strahlung berücksichtigt werden. Damit ändert sich Gleichung [21] in

$$R = I\,(1 - 0{,}89 \tanh(0{,}05 h_0)) \; .$$

5.2.2 Terrestrische Strahlung

Als terrestrische Strahlung bezeichnet man die im langwelligen Bereich 6µm...60µm liegenden Strahlungen des Bodens und des Wassers sowie die Gegenstrahlung der Atmosphäre.

5.2.2.1 Gegenstrahlung

Die Gegenstrahlung A ist die langwellige Ausstrahlung von in der Luft vorhandenem Wasserdampf, Kohlendioxid und Ozon.
A wird an der Pegelstation aus der Messung der Gesamtstrahlung mit einem Pyrradiometer nach Schulze abgeleitet. Das Meßinstrument erfaßt den gesamten Raum, in dieser Gebirgslage also auch die von hohen Felswänden kommende Strahlung. Nun ist die Pegelstation aber in Talmitte gelegen und aufsteigende Bergflanken sind etwa 1 km entfernt. Daher wird davon ausgegangen, daß deren Strahlungen das Meßresultat nicht sehr stark beeinflußen und die gemessene Gegenstrahlung hauptsächlich der Atmosphäre entstammt.

Um die Übertragbarkeit des Meßwertes auf höher gelegene Bereiche des Bachsystems feststellen zu können, müssen diejenigen Stellen untersucht werden, an denen eine nennenswerte Horizontüberhöhung durch Felswände in Bachnähe auftritt. So führt der Schwarzkögelebach Nr.6 auf einer Länge von 300m an einer Felswand vorbei, die für den Bach eine maximal 45°-Horizontüberhöhung bedeutet. Diese Überhöhung stellt den extremsten Fall aller sieben Bäche dar. Für die anderen Bäche erhält man Horizontüberhöhungen von 5° bis 20°.

Im Raumbereich der Horizontüberhöhungen strahlt nun zur zwischen Bach und Berg befindlichen Luft auch noch die Felswand dazu. Dies dürfte jedoch nur dann einen merkbaren Unterschied für die Strahlungsbilanz an der Wasseroberfläche bewirken, wenn zuvor die Felswand über eine längere Zeit hinweg kräftig von der Sonne aufgeheizt wurde. Eine Berechnung dieses Strahlungseinflußes erfordert dann die Kenntnis der räumlichen Orientierung sowie der Entfernung des Berghanges zum Bach. Für diese Aufgabe würde sich die Verwendung eines digitalisierten Geländemodells anbieten, jedoch wurde wegen des sehr hohen Aufwandes

und der meistens geringen Horizontüberhöhungen darauf verzichtet und der Pegelmeßwert der Gegenstrahlung A für alle Abschnitte der Bäche übernommen.

Die Gegenstrahlung wird von der bewegten Wasseroberfläche nach Hofmann,1974 zu 92% absorbiert, wobei die Absorption schon in den obersten Zentimetern stattfindet. An gischtbedeckten Stellen wird ein Absorptionsvermögen von 98-99% ähnlich dem von Schnee angenommen. Dies ergibt im Mittel einen Absorptionskoeffizienten für terrestrische Strahlung von 94 %, wenn etwa ein Drittel der Wasseroberfläche mit Gischt bedeckt ist.

5.2.2.2 Ausstrahlung

Als letzter Term in der Strahlungsbilanz Q ist schließlich noch die langwellige Ausstrahlung E des Wassers zu berechnen. Diese ergibt sich nach dem Stefan-Boltzmann Gesetz zu

$$E = \varepsilon_l \, \sigma \, T_W^4 , \qquad [22]$$

wobei ε_l die terrestrische Emissionszahl, σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T_W die Wassertemperatur in Kelvin bedeuten.
Da alle Körper sowohl bei jeder einzelnen Wellenlänge als auch in Spektralbereichen ebensoviel emittieren wie sie absorbieren, wird der Emissionskoeffizient ε_l für langwellige Strahlung gemäß dem früher besprochenen zu 0.94 angesetzt. Die Stefan-Boltzmann-Konstante hat den Wert

$$\sigma = 5.667 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad . \qquad [23]$$

Damit ist die Berechnung der Strahlungsbilanzterme abgeschlossen.

5.3 Der Strom fühlbarer Wärme

Der Wärmestrom L entsteht durch das Temperaturgefälle von der Wasseroberfläche zur darüberstreichenden Luft. Dieses Gefälle wird von den Strahlungsverhältnissen, der Windgeschwindigkeit sowie Rauhigkeit der Oberfläche beeinflußt. Eine stabile Schichtung über kaltem Wasser bewirkt einen Wärmestrom von der Luft zum Wasser, eine labile Schichtung verursacht bei thermischer Konvektion einen Wärmestrom von der Wasseroberfläche zur Luft. Konventionsgemäß wird der zu einer Oberfläche hin gerichtete Wärmestrom als positiv, der von einer Oberfläche weg gerichtete als negativ angesehen.

Eine kleinere Windgeschwindigkeit führt wegen abnehmender Turbulenzen zu kleinerem L, zunehmende Windgeschwindigkeit durchmischt die Luft besser und läßt L ansteigen. Veränderliche Oberflächenrauhigkeiten beeinflußen L wegen der induzierten Turbulenzen im gleichen Sinn.

Auf Grund dieser vielfältigen Zusammenhänge wurde bisher schon häufig versucht, im einfachen Ansatz für den Strom fühlbarer Wärme

$$L = -\alpha_L (T_W - T_L) \quad ; \quad \alpha_L = c_1 + c_2 V_L^{c_3} , \qquad [24]$$

wobei α_L den Wärmeübergangskoeffizienten, T_L, T_W die Luft- bzw. Wassertemperatur, V_L die Windgeschwindigkeit und c_1, c_2, c_3 Konstanten bedeuten den Wärmeübergangskoeffizienten dahingehend zu verändern, daß die eben beschriebenen Abhängigkeiten in ein physikalisch begründetes Austausch modell Eingang finden. Zum Beispiel führt Witte, 1982 α_L auf das geometrische Mittel zweier Übergangszahlen α_e bei erzwungener und α_f bei freier Konvektion zurück,

$$\alpha_L = \sqrt{\alpha_e^2 + \alpha_f^2} , \qquad [25]$$

wobei zuvor α_e mit der Monin-Obukhov-Theorie an die Luftschichtung und α_f an die Temperaturdifferenz zwischen Wasser und Luft angepaßt wurde.

Dieses α_L hat den Vorteil, nicht nur mittlere Verhältnisse richtig zu beschreiben, wie es etwa die empirischen Formeln von Trabert oder

Rimscha u.Donschenko können, sondern auch bei Extremfällen wie stark stabilen oder labilen Schichtungen eine Berechnung des Wärmeübergangs zu erlauben. Allerdings verlangt die Formel Messungen von Wind und Lufttemperatur über dem gleichen Meßpunkt in mindestens zwei Höhen. Damit erweist sie sich hier mangels Meßwerten für die Berechnung des Stroms fühlbarer Wärme L als nicht geeignet und es wird in Anlehnung an Escher-Vetter,1980

$$\alpha_L = 1 + 5\sqrt{v_L} \qquad [26]$$

verwendet, woraus sich α_L in $Wm^{-2}K^{-1}$ergibt, wenn v_L in ms^{-1} gegeben ist.

Nun wird der Term $(T_W - T_L)$ an die Verhältnisse im Gletschervorfeld angepaßt. Der Höhenbereich der Bäche reicht von 2640m am Pegel bis 2860m am Austritt der Bäche Nr.1,2 und 6. Für diese 220m Höhendifferenz steht nur der Meßwert der Lufttemperatur ϑ_L an der Pegelstation zur Verfügung, so daß nach einer Berechnungsmethode Ausschau gehalten werden muß, welche die Lufttemperaturverteilung im Gebiet aller sieben Bäche richtig beschreibt. Diese Methode findet sich ebenfalls in Escher-Vetter,1980. Dort wird, ausgehend von Lufttemperaturregistrierungen an der Pegelstation und an einer in 3075m Höhe gelegenen Station Gletschermitte festgestellt, daß die Änderung der Lufttemperatur mit der Höhe nicht dem mittleren Temperaturgradienten in der Troposphäre entspricht, sondern einen eigenen, von der Wettersituation abhängigen Tagesgang aufweist. So kann in frühen Tagesstunden, wenn über dem Gletscher bereits die Sonne aufgegangen ist, im Vorfeld aber noch nicht, sogar ein positiver Gradient entstehen, der im Laufe des Tages wegen stärkerer Erwärmung des Vorfeldes in einen überadiabatischen Gradienten umschlagen kann. Diese Extreme schwächen sich mit zunehmender Bewölkung ab. An Tagen ohne Bewölkung (Klasse I), mittlerer (Klasse II) und starker Bewölkung (Klasse III) gibt Escher-Vetter die in Tabelle 4 aufgeführten Stundenmittelwerte der Gradienten der Lufttemperatur von der Pegelstation bis Station Gletschermitte an:

Tab.4: Gradienten der Lufttemperatur über Vorfeld und Gletscher in K/100m, Zeit in h aus Escher-Vetter,1980

Zeit	Klasse I	Klasse II	Klasse III
0 - 6	-0.47	-0.57	-0.55
6 - 8	-0.27	-0.46	-0.55
8 - 12	-0.61	-0.82	-0.80
12 - 20	-0.88	-0.82	-0.80
20 - 24	-0.64	-0.68	-0.74
Tagesmittel	-0.64	-0.71	-0.71

Abbildung 18,1 verdeutlicht die in Tabelle 4 enthaltenen Werte.

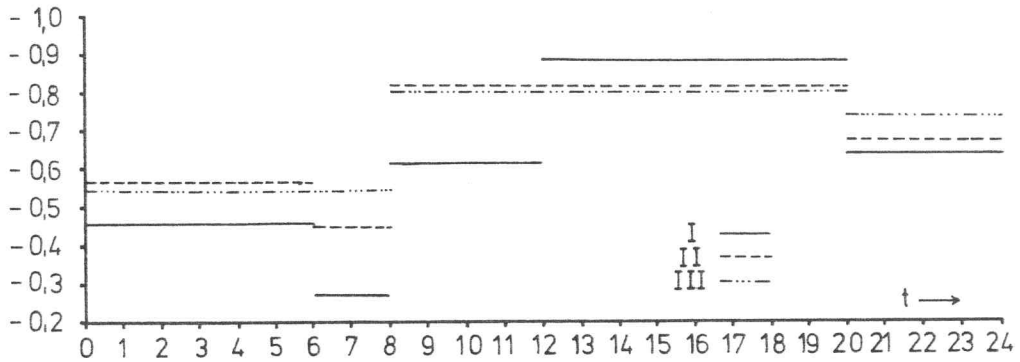


Abb. 18,1: Lufttemperaturgradienten nach Tabelle 4

Des weiteren wird unterschieden zwischen einem Gradienten Pegelstation-Zungenende und einem Gradienten Zungenende-Station Gletschermitte. Beide zusammen bewirken einen Gradienten Pegelstation-Gletschermitte, wobei der erstere im allgemeinen stärker negativ ist als der zweite. Jedoch macht der Fehler durch die Vernachlässigung dieser Verschiebung von etwa 0.1-0.2 K/100m bei einer Windgeschwindigkeit von 3 m/s über 200 m Höhendifferenz nur 4 W/m^2 aus und wird daher vernachlässigt. Genauso wird nicht berücksichtigt, daß Ost- und Westseite des Gletschervorfeldes zu gleichen Zeiten verschieden stark erwärmt werden und auch dadurch eine lokale Veränderung des Gradienten stattfindet. Der Strom fühlbarer Wärme folgt also aus der Formel

$$L = -(1+5\sqrt{v_L})\,(T_W - T_L) \qquad [27]$$

wobei zuvor die Lufttemperatur T_L mit den Gradienten der Tabelle 4 berechnet wird. Mit der Temperaturdifferenz in K und v_L in ms^{-1} ergibt sich L in Wm^{-2}.

5.4 Der Strom latenter Wärme

Wie beim Strom fühlbarer Wärme L wird der Strom latenter Wärme V vom Gefälle einer Eigenschaftsdichte verursacht. Ist die Eigenschaft bei L die spezifische Enthalpie $c_p T_L$ im Bereich der Grenzfläche Wasser-Luft, so ist bei V die spezifische Verdunstungsenthalpie rs maßgebend. Wegen dieser Wesensverwandtschaft beider Wärmeströme lassen sie sich auf ähnlich strukturierte Gleichungen zurückführen. Die Schmidt'sche Austauschgleichung für den turbulenten Transport lautet in beiden Fällen für stationäre und horizontal homogene Verhältnisse:

Strom fühlbarer Wärme	Strom latenter Wärme
$L = A' c_p \frac{dT_L}{dz}$ [28]	$V = A' r \frac{ds}{dz}$ [29]

Es bedeuten A' den Austauschkoeffizient, c_p die spezifische Wärmekapazität der Luft, T_L die Lufttemperatur, r die Verdunstungsenthalpie des Wassers und s die spezifische Feuchte der Luft.

Nun sind aber häufig und auch hier die vertikalen Profile der Lufttemperatur T_L und der spezifischen Feuchte s nicht bekannt. Daher wird die Austauschform durch Integration vom Boden bis zur Höhe z in die Übergangsform modifiziert:

$$L = -\alpha_L (T_W - T_L)$$

wegen

$$T_L - T_W = L \int_0^z \frac{dz}{A' c_p}$$

$$V = \frac{-0{,}622\, r}{p\, c_p} \alpha_L (E_W - e_L) \qquad [30]$$

$$s = 0{,}622 \frac{e_L}{p}$$

$$V = A' c_p \frac{0{,}622\, r}{p\, c_p} \frac{de_L}{dz}$$

$$E_W - e_L = -V \frac{p\, c_p}{0{,}622\, r} \int_0^z \frac{dz}{A' c_p}$$

$$\alpha_L = \frac{1}{\int_0^z \frac{dz}{A' c_p}}$$

α_L ist der Wärmeübergangskoeffizient, T_W die Wassertemperatur, E_W der Sättigungsdampfdruck des Wassers, e_L der Dampfdruck der Luft und p der Luftdruck.

Prinzipiell wird V durch die Orographie und die meteorologischen Parameter im gleichen Sinn beeinflußt wie L. Diese Veränderung soll allein durch einen entsprechenden Ansatz für den Wärmeübergangskoeffizienten α_L aufgefangen werden, der bereits im vorhergehenden Kapitel berechnet wurde und wegen seiner Gleichheit für L und V auch für V verwendet werden kann. Der Sättigungsdampfdruck von Wasser und Luft wird mit der Magnus-Formel

$$E_L = 6{,}107 \cdot 10^{\frac{7{,}5\,\vartheta}{238+\vartheta}} \qquad [31]$$

berechnet, wobei hier die Temperatur in Celsius einzusetzen ist und der Sättigungsdampfdruck dann in hpa folgt. Der Sättigungsdampfdruck der Luft E_L ergibt zusammen mit dem Meßwert der relativen Luftfeuchte f_L den Dampfdruck der Luft

$$e_L = f_L \, E_L \, . \qquad [32]$$

Hier wird vorausgesetzt, daß die Luftfeuchte im gesamten Gletschervorfeld gleich dem an der Pegelstation gemessenen Wert ist. Als Formel für die Bestimmung des Stromes latenter Wärme wird also verwendet

$$V = -\frac{0{,}622\,r}{p\,c_p}\,\alpha_L (E_W - e_L)$$
$$\alpha_L = 1 + 5\sqrt{v_L} \qquad [33]$$

5.5 Die Energiedissipation

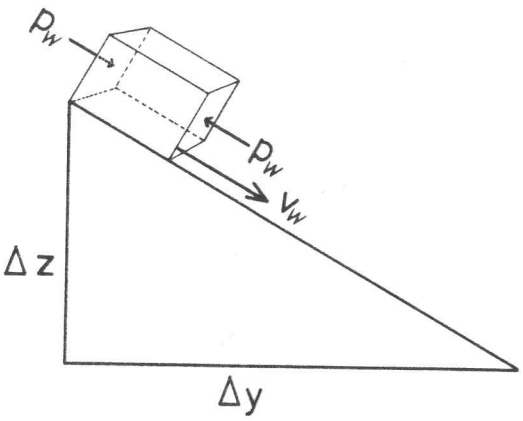


Abb. 21,1 : Talwärts fließendes Wasserpaket

Würde sich ein Einheitswasservolumen wie in Abbildung 21,1 reibungsfrei talabwärts bewegen, so könnte man auf diese stationäre Strömung die Bernoulli-Gleichung anwenden:

$$\frac{p_w}{\rho_w} + g\Delta z + \frac{\bar{v}_w^2}{2} = \text{const} . \qquad [34]$$

In dieser Gleichung bedeuten p_w den Wasserdruck, ρ_w die Dichte des Wassers, g die Schwerebeschleunigung, Δz die Fallhöhe und $\bar{v}_w$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

$\rho_w \frac{p_w}{\rho_w}$ beschreibt die Druckenergie, $\rho_w g \Delta z$ die potentielle Energie und $\rho_w \bar{v}_w^2/2$ die kinetische Energie des Einheitsvolumens. Die Gleichung sagt aus, daß bei konstanter Druckenergie während des Fließens die potentielle Energie des Wasserpaketes vollständig in kinetische Energie übergeht. Das würde bei Übertragbarkeit der Bernoulli-Gleichung auf einen natürlichen Gletscherbach bedeuten, daß ein am Anfang des Baches Nr.7 startendes Wasserpaket nach 1580 m Fließlänge und 190 m Höhenverlust mit einer Geschwindigkeit von 61 m/s an der Pegelstation vorbeifließen müßte. Tatsächlich werden aber in Gebirgsbächen keine höheren Fließgeschwindigkeiten als 1-2 m/s gemessen. Die Ursache für diesen Verlust an kinetischer Energie sind offensichtlich die Hemmnisse in Form von Steinen und Felsen, die das Wasser am freien Fließen hindern sowie die innere Reibung des turbulenten Wassers. An den Hindernissen wird ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgesetzt und kommt so wie die turbulente Reibung direkt dem Wasser als zusätzlicher Wärmestrom zugute. Es ist

$$\frac{dW}{dt} = \rho_w c_w \bar{h}_w \frac{dT_w}{dt} \qquad [35]$$

die Änderung des Wärmeinhalts W eines Einheitswasservolumens der Dichte ρ_w, der spezifischen Wärmekapazität c_w, der Tiefe $\bar{h}_w$ und der Temperatur T_w.

Wegen

$$\rho_w = \frac{m}{V} = \frac{m}{O\,\bar{h}_w} \qquad [36]$$

ist

$$E_p = \rho_w\, O\, \bar{h}_w g\, z \qquad [37]$$

die potentielle Energie E_p des Volumens V mit der Masse m in der Höhe z. O ist die Grundfläche des quaderförmigen Wasserkörpers. Die auf 1 m^2 der Oberfläche bezogene zeitliche Abnahme dieser Lageenergie

$$\frac{dE_p}{dt} = -\rho_w \bar{h}_w g \frac{dz}{dt} \qquad [38]$$

ist wegen

$$\bar{v}_w = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad dt = \frac{dy}{\bar{v}_w}$$

als

$$\frac{dE_p}{dt} = -\rho_w \bar{h}_w g\, \bar{v}_w \frac{dz}{dy} \qquad [39]$$

mit der mittleren Geschwindigkeit des Volumens $\bar{v}_w$ und dem Gefälle der Strömung dz/dy, der Zunahme des Wärmeinhaltes gleichzusetzen:

$$-dE_p/dt = dW/dt\,. \qquad [40]$$

Aus Gleichung [1] ist aber die Temperaturzunahme des Wassers als

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{1}{\rho_w \bar{h}_w c_w}\,\Pi$$

bekannt, wobei Π die Summe der Wärmestromdichten an der Wasseroberfläche darstellt. Damit erhält man

$$\frac{dW}{dt} = \rho_w \bar{h}_w c_w \frac{1}{\rho_w \bar{h}_w c_w}\,\Pi = \rho_w \bar{h}_w g\, \bar{v}_w \frac{dz}{dy}\,. \qquad [41]$$

Dieser Wärmestrom Π ist also die infolge der Energiedissipation pro Flächeneinheit erzeugte Wärme

$$P = \rho_w \bar{h}_w g\, \bar{v}_w \frac{dz}{dy}\,. \qquad [42]$$

Auf das den Bach Nr.7 hinabfließende Einheitswasserpaket wirkt die Umsetzung von potentieller Energie in thermische Energie wie ein zusätzlicher Wärmestrom der Dichte 140-420 W/m^2, wenn $\bar{h}_w$ mit 0.1-0.3 m, $\bar{v}_w$

mit 1.2 m/s und dz/dy = 190/1580 verwendet werden. Unabhängig von der Gewässertiefe und Fließgeschwindigkeit resultiert daraus eine Erhöhung der Wassertemperatur um

$$d\,T_w = \frac{g}{c_w}\,dz = 2.33 \cdot 10^{-3} \text{ Kelvin bei 1 m Fallhöhe,} \quad [43]$$

entsprechend der Fließlänge eine Gesamterhöhung am Pegel um 0.444 K bei Vernachlässigung von Ausstrahlung und Bodenwärmestrom. Die Energiedissipation ist also mit den anderen Wärmestromdichten durchaus vergleichbar und spielt im Winter keine geringe Rolle in Bezug auf das Vereisungsverhalten von Bächen und Flüssen. Aus diesem Grund wird die Energiedissipation hier nicht vernachlässigt.

5.6 Gerinnehydraulik

Die Bewegung einer Flüssigkeit in offenen Gerinnen (Kanälen, Flüssen, Bächen) hat viele gemeinsame Merkmale mit der Strömung in geschlossenen Rohrleitungen. Über letztere sind umfangreiche Untersuchungen theoretischer wie experimenteller Art durchgeführt worden. Während jedoch bei vollgefüllten Rohren die Flüssigkeit allseitig von festen Wänden umgeben ist, haben offene Gerinne sowie auch teilgefüllte Rohre neben festen Wänden außerdem eine freie Oberfläche. In der Mehrzahl der praktisch wichtigen Fälle stellt diese eine Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und Luft dar.

Die Flüssigkeitsströmung in offenen Gerinnen kann stationär sein, also unabhängig von der Zeit. Sie kann aber auch instationär sein, z.B. bei Hochwasserablauf oder nach Öffnen und Schließen von Absperrungen. Eine stationäre Strömung heißt gleichförmig, wenn die Strömungsquerschnitte überall gleich groß sind. Sie ist ungleichförmig, wenn sich die Querschnitte in Strömungsrichtung verkleinern, etwa bei Absenkung des Flüssigkeitspiegels und beschleunigter Bewegung oder sich vergrößern bei Aufstauung und verzögerter Bewegung der Flüssigkeit.

Die Strömung in offenen Gerinnen ist eine Folge des vorhandenen Gefälles, wobei im allgemeinen zwischen dem Spiegelgefälle J_0 und dem geometrischen Sohlengefälle J_S zu unterscheiden ist. Bei gleichförmigem Fließen und unveränderlicher Bettgeometrie sind J_0 und J_S gleichgroß.

Höher liegende Flüssigkeitsteile besitzen eine bestimmte potentielle Energie, die beim Abwärtsfließen in kinetische Energie umgesetzt wird und zur Überwindung der infolge Reibung auftretenden Strömungswiderstände dient. Wie bei der Strömung in geschlossenen Rohrleitungen hat man auch hier grundsätzlich zu unterscheiden zwischen laminarer und turbulenter Strömung. Für die in dieser Arbeit beschriebene Problemstellung kommt indessen nur die turbulente Fließart in Frage.

Unabhängig vom Begriff der laminaren oder turbulenten Bewegung kann sich die Flüssigkeit im offenen Gerinne auf zweierlei Art, nämlich als strömender oder schießender Abfluß fortbewegen. Dabei versteht man unter Strömen einen ruhigeren und unter Schießen einen schnelleren,

heftigeren Fließvorgang. Während die strömende Bewegung in die schießende stetig übergehen kann, muß der umgekehrte Wechsel der Abflußart in Form eines „hydraulischen Sprunges" unstetig erfolgen.

5.6.1 Geometrie

Sehr viele Ergebnisse von Rohrströmungsuntersuchungen lassen sich auf die Gerinneströmung übertragen, wenn man den Durchmesser des kreisförmigen Rohres durch einen gleichwertigen Durchmesser D_g ersetzt bzw. eine aus dem Wasserbau stammende hydraulische Querschnittstiefe h_f, die auch unter dem Namen hydraulischer Radius oder Profilradius bekannt ist, verwendet. Es gilt

$$D_g = 4\frac{A}{U} \qquad h_f = \frac{A}{U} \qquad [44]$$

Es ist A die Fläche des flüssigkeitsführenden Querschnittes normal zur Fließrichtung und U der Umfang der benetzten Gerinnewand.

Für ein Gerinne mit rechteckigem Querschnitt der Breite 2b, das bis zur Höhe $\bar{h}_W$ mit Flüssigkeit gefüllt ist, wird dann

$$D_g = 4\frac{2b\bar{h}_W}{2b+2\bar{h}_W} = 4\frac{b\bar{h}_W}{b+\bar{h}_W} \quad ; \quad h_f = \frac{b\bar{h}_W}{b+\bar{h}_W} \; . \qquad [45]$$

5.6.2 Kennzahlen

Der Strömungsverlauf in einem offenen Gerinne hängt zum einen von der Reynoldszahl Re und der Rauhigkeit der Gerinnewandung sowie zum anderen von der Froudezahl Fr ab. Sie sind definiert als

$$Re = \frac{\bar{v}_W D_g}{\nu} \quad ; \quad Fr = \frac{\bar{v}_W}{\sqrt{g\,h_f}} \; , \qquad [46]$$

wobei $\bar{v}_W$ die mittlere Fließgeschwindigkeit, D_g der gleichwertige Durchmesser, h_f der hydraulische Radius, ν die kinematische Viskosität und g die Fallbeschleunigung ist. Die Größe der Reynoldszahl ist maßgebend dafür, ob es sich um eine laminare ($Re < 2300$) oder um eine turbulente ($Re > 2300$) Strömung handelt. Die Froudezahl als das

Verhältnis der Fließgeschwindigkeit $\bar{V}_W$ zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grundwelle sagt aus, ob die Flüssigkeit strömt (Fr < 1) oder schießt (Fr > 1).

5.6.3 Energiehöhen

In der Gerinnehydraulik wird bei stationärer Strömung im allgemeinen mit der sogenannten Höhenform der Energiegleichung gerechnet. Diese lautet für die reibungsbehaftete Gerinneströmung:

$$(Z_S + Z_P + Z_V)_1 = (Z_S + Z_P + Z_V)_2 + (Z_E)_{1\to 2} \qquad [47]$$

Dabei ist Z_S die Ortshöhe der Gerinnesohle, Z_P die Druckhöhe, also Flüssigkeitstiefe, Z_V die Geschwindigkeitshöhe und Z_E die Energieverlusthöhe, die Dissipation. Index 1 und 2 bezeichnet zwei beliebige Stellen in Fließrichtung der Strömung. Abbildung 26,1 verdeutlicht diese Gleichung.

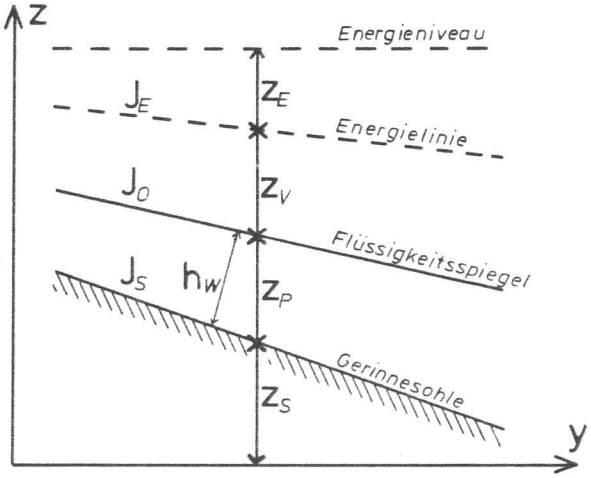


Abb.26,1 : Energiehöhen im Strömungsverlauf

Die Lage des Flüssigkeitsspiegels beträgt $Z_0 = Z_S + Z_P$. Ferner kann der Abbildung entnommen werden:

$$\text{Sohlengefälle} \quad : \quad J_S = -\frac{dZ_S}{dy} > 0$$

$$\text{Spiegelgefälle} \quad : \quad J_0 = -\frac{dZ_0}{dy} > 0 \qquad [48]$$

$$\text{Energieliniengefälle:} \quad J_E = \frac{dZ_E}{dy} > 0$$

5.6.4 Fließformeln

5.6.4.1 Rohrströmung

Bei gleichförmigem Fließen unter Druck durch ein vollgefülltes Rohr konstanten Querschnittes sind die Verteilungen von Fließgeschwindigkeit und Schubspannung in Fließrichtung unveränderlich. Dagegen wächst die Verlusthöhe z_E längs des Rohres stetig an, wie Abbildung 27,1 zeigt. Das Energieliniengefälle J_E ist unter diesen Bedingungen konstant und die Energielinie verläuft parallel zur Drucklinie. Es besteht der Zusammenhang

$$dz_E = -\frac{1}{\rho_W g}\, dp_W \quad , \qquad [49]$$

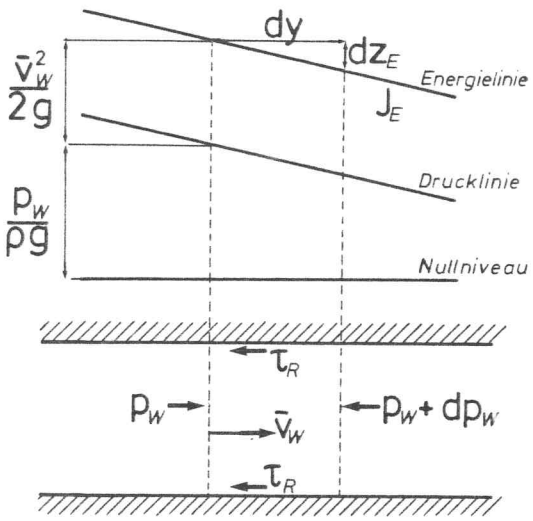


Abb.27,1 : Energien und Kräfte im Kreisrohr

wenn z_E die Verlusthöhe, p_W der Druck, ρ_W die Dichte der Flüssigkeit und g die Schwerebeschleunigung bedeuten. Da die Wandschubspannung τ_R und der Druck p_W im Gleichgewicht stehen müssen, gilt

$$\tau_R\, U\, dy = -A\, dp_W = \rho_W g A\, dz_E . \qquad [50]$$

U ist der Umfang des Rohres und A die Querschnittsfläche in Fließrichtung.

Für das Kreisrohr mit

$$U = \pi d \quad ; \quad A = \pi d^2/4 \qquad [51]$$

und dem Energieliniengefälle

$$J_E = dz_E/dy$$

folgt

$$\tau_R = \frac{1}{4}\rho_W g\, J_E d \, , \qquad [52]$$

wobei d der Durchmesser des Rohres ist. Definiert man als Schubspannungsgeschwindigkeit v_R^* an der Rohrwand

$$v_R^* = \sqrt{\tau_R/\rho_W} \, , \qquad [53]$$

so folgt für diese mit dem vorigen

$$v_R^* = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{2 g J_E d} \; . \qquad [54]$$

Experimentelle Erfahrungen haben gezeigt, daß v_R^* als proportional zur mittleren Fließgeschwindigkeit $\bar{v}_W = DM/A$ (DM : Durchflußmenge) mit

$$v_R^* = \sqrt{\Lambda/8} \; \bar{v}_W \quad ; \quad \Lambda\text{: Widerstandsbeiwert Rohr} \qquad [55]$$

angesetzt werden kann, so daß sich der Zusammenhang zwischen Durchfluß bzw. Fließgeschwindigkeit und Energie- bzw. Druckliniengefälle

$$\bar{v}_W = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sqrt{2 g J_E d} \qquad [56]$$

ergibt.

Gleichung [56] ist die Fließformel von Brahms/de Chezy und die Grundform jedes Fließgesetzes, denn diese Herleitung erlaubt es, auch nichtkreisförmige Rohrquerschnitte zu untersuchen, wobei statt des Rohrdurchmessers d der gleichwertige Durchmesser D_g mit $D_g = 4A/U$ anzusetzen ist. Weiterhin war eine Unterscheidung zwischen laminarer oder turbulenter Bewegung nicht erforderlich, so daß die Fließformel für beide Arten unverändert gilt. Jedoch zeigen sich im Widerstandsbeiwert Λ für laminare oder turbulente Strömung wesentliche Unterschiede. Während bei laminarer Strömung Λ nur durchflußabhängig ist und von $\Lambda = 64/Re$ bei Kreisrohren bis $96/Re$ bei extrem breiten Rechteckrohren variiert, wird bei turbulenter Strömung die von Colebrook und White aufgestellte Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log \left\{ \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\Lambda}} + \frac{k_S/d}{3{,}71} \right\} \qquad [57]$$

mit der äquivalenten Sandrauhigkeit k_S verwendet, die sich von solch universellem Charakter erwiesen hat, daß sie in den Grenzfällen „hydraulisch glatt" und „vollkommen rauh" ebenso anwendbar ist wie bei nicht kreisförmigen Rohren.

Die Größe k_S stellt eine zur schwer erfaßbaren natürlichen Rauhigkeit vergleichbare äquivalente Sandrauhigkeit dar, die wohldefiniert und leicht meßbar ist, und ergibt zusammen mit dem Rohrdurchmesser d die relative Rauhigkeit $\varepsilon = k_S/d$. Zahlenwerte für k_S reichen von 0.001mm bis 3000mm und werden in Tabelle 5, Seite 31 aufgeführt.

5.6.4.2 Gerinneströmung

Aus der allgemeinen Fließformel für vollgefüllte Rohrströmungen läßt sich das Energieliniengefälle $J_{E,R}$ des Rohres zu

$$J_{E,R} = \frac{\Lambda_R}{d} \cdot \frac{\bar{v}_{W,R}^2}{2g} \qquad \text{Index R : bezogen auf Rohr} \qquad [58]$$

bestimmen und mit der Reynoldszahl des Rohres $Re_R = \frac{\bar{v}_{W,R}\, d}{\nu}$ als

$$J_{E,R} = \Lambda_R Re_R^2 \frac{\nu^2}{2gd^3} \qquad [59]$$

angeben. Der entsprechende Ansatz für eine Gerinneströmung lautet mit dem gleichwertigen Durchmesser $D_g = 4A/U$

$$J_E = \Lambda_G Re^2 \frac{\nu^2}{2gD_G^3} \quad . \qquad [60]$$

Unter der Vorraussetzung Reynoldscher Ähnlichkeit, $Re = Re_R$, ergeben sich gleiche Gefälle $J_E = J_{E,R}$, wenn

$$\Lambda_G = \Lambda_R (D_g/d)^3 . \qquad [61]$$

Der Reibungsbeiwert Λ_G der Gerinneströmung kann auf Grund dieses Vergleichs also mit dem Λ_R-Wert einer Rohrströhmung bestimmt werden, wenn der vergleichbare Rohrdurchmesser d bekannt ist. Setzt man $d = f\, D_g$, so ist der Parameter f offenbar nur durch die Form des Gerinnequerschnittes bedingt und ein Maß für den wirksamen gleichwertigen Durchmesser, der dann nicht mehr mit $D_g = 4A/U$ übereinstimmt.

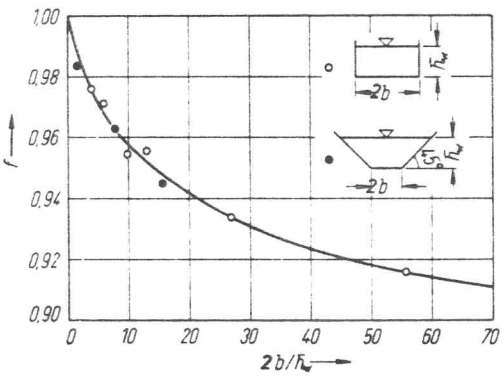


Abb. 29,1 : Formbeiwerte f für Kanal- und Trapezprofile

Bock, 1966 und Marchi, 1962 haben experimentell nachgewiesen, daß der Formparameter f je nach Bettprofil Werte zwischen 0,8 und 1,0 annimmt. Allerdings sind nur hydraulisch glatte Verhältnisse untersucht worden. Abbildung 29,1 zeigt, daß in den meisten Fällen mit nur wenig von 1 abweichenden Formbeiwerten zu rechnen ist. Der durch die Vernachlässigung dieser Abweichung entstehende Fehler wird um so geringer

sein, je mehr der Gerinnequerschnitt einem Kreis ähnlich ist. Für die Gletscherbäche, die bei etwa 2-5 m Breite Tiefen von 0.05-0.3 m aufweisen, muß der Formbeiwert aus einer vorhandenen Messung der Fließgeschwindigkeit ermittelt werden, wie weiter unten noch gezeigt wird.

Wird das allgemeine Fließgesetz von Brahms/de Chezy

$$\bar{v}_W = \sqrt{2\,g\,J_S\,D_g/\Lambda} \qquad [62]$$

($J_S = J_E$ bei stationärer und gleichförmiger Strömung) mit D_g/ν zu

$$Re = \bar{v}_W D_g/\nu \qquad [63]$$

ergänzt, so ergibt sich unter Verwendung des Ippenschen Gefälleparameters

$$l = \sqrt[3]{\frac{v^2}{2\,g\,J_S}} \quad , \qquad [64]$$

einer für das Gerinne typischen Länge, und der Colebrook-White-Beziehung eine dimensionslose Fließformel für turbulente Strömungen, die einen direkten Zusammenhang der maßgebenden Strömungsgrößen Fließgeschwindigkeit, Druckgefälle = Sohlengefälle und Rauhigkeit herstellt:

$$Re = -2\left[\frac{\frac{k_S}{l}}{\frac{k_S}{f D_g}}\right]^{\frac{3}{2}} \log\left\{2{,}51\left[\frac{\frac{k_S}{f D_g}}{\frac{k_S}{l}}\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{k_S}{f D_g}}{3{,}71}\right\} . \qquad [65]$$

Eine der größten Schwierigkeiten bei der Berechnung des turbulenten Abflusses besteht in der zutreffenden Wahl der äquivalenten Sandrauhigkeiten k_S. Der dabei entstehende Fehler kann wesentlich größer sein als jener Fehler, der sich bei nicht kreisförmigen Fließquerschnitten durch einen ungenauen Formbeiwert f ergibt. Die folgende Tabelle 5 zeigt für Rohr und Gerinne gültige Anhaltswerte für die äquivalente Sandrauhigkeit k_S.

Tabelle 5: Äquivalente Sandrauhigkeiten für verschiedene Oberflächen aus Schröder, 1968

Rauhigkeitsgrad	Art der Oberfläche	k_s in mm
Technisch glatt	Gezogene Metalle, poliert	0.001
	Glas, Plexiglas	0,003
Fast glatt	Stahl, ungestrichen	0,03
	Stahl mit glattem Anstrich	0,06
Mäßig rauh	Eisen verzinkt, Beton größter Glätte	0,15
	Holz, gehobelt, neu; Gußeisen	0,30
	Stahl, angerostet	0,60
Rauh	Holz, ungehobelt	1,5
	Walzgußasphalt	2,0
	Holz, alt; Beton mit Fugen	3,0
	Mauerwerk, geputzt	6,0
Sehr rauh	Beton, grob	10-20
	Feinkies	30
	mittlerer Kies	50
	Grobkies	75
	Schotter	90
Extrem rauh	Grobschotter, mäßiger Geschiebebetrieb	bis 200
	Geröll, unregelmäßig	bis 400
	Geröll, bei starkem Geschiebe	bis 650
	Oberflächen mit Wildbachcharakter	bis 900
	Felsausbruch, mittelgrob	bis 1500
	Wildbach mit starkem Geschiebe	bis 1500
	Felsausbruch, roh, äußerst grob	bis 3000

Für die dimensionslose Fließformel [65] läßt sich eine Näherung

$$Re = 2{,}33 \left[\frac{k_s}{l}\right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{k_s}{f D_g}\right]^{-\frac{5}{3}} \qquad [66]$$

angeben, die nach Resubstitution von **Re** und **l** übergeht in

$$\bar{v}_w = 2{,}33\, f^{\frac{5}{3}} (k_s/D_g)^{-\frac{1}{6}} \sqrt{2 g J_s D_g} \quad . \qquad [67]$$

Bei Verwendung des hydraulischen Radius $h_f = A/U = D_g/4$ entsteht hieraus mit

$$\frac{1}{n} = 5{,}87\sqrt{2g}\; k_s^{-\frac{1}{6}}\; f^{\frac{5}{3}} \qquad [68]$$

die Fließformel von Manning-Strickler

$$\bar{v}_w = \frac{1}{n}\, h_f^{\frac{2}{3}} \sqrt{J_s}\ . \qquad [69]$$

Der Kehrwert des Rauhigkeitsbeiwertes n nach Manning-Strickler läßt sich für Gebirgsbäche mit grobem Geröll zu

$$\frac{1}{n} \approx 25\ \frac{m^{1/3}}{s} \qquad [70]$$

berechnen.

Mit der Manning-Strickler-Formel steht nun ein benutzerfreundliches Fließgesetz zur Verfügung, das es gestattet, wahre Bachfließgeschwindigkeiten als Funktion der meßbaren Größen Breite, Tiefe und Gefälle des Baches bei bekannter Rauhigkeit zu berechnen. Abbildung 32,1 zeigt die Variation von $\bar{v}_w$ mit dem Gefälle, wobei der hydraulische Radius h_f den Scharparameter darstellt.

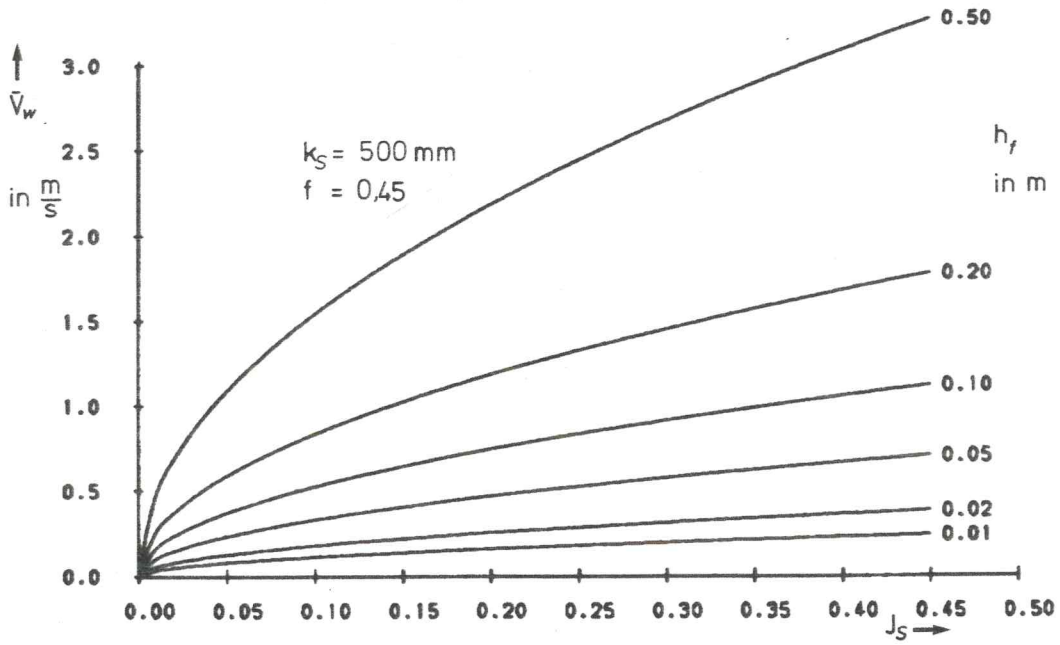


Abb.32,1 : Fließgeschwindigkeit $\bar{v}_w$ in m/s bei Gefälle J_s und hydraulischem Radius h_f in m

Während der hydrologischen Erfassung der Gletschervorfeldes am 23.7.1976 wurden auch Fließzeitenmessungen des Baches Nr.7 durchgeführt. Es stellte sich heraus, daß ein Tracer, der 200 m oberhalb der Pegelstation eingegeben wurde, etwa nach 4 Minuten die Station, nach 17 Minuten den Zufluß des Guslarbaches in den Vernagtbach 800 m weiter und nach 22 Minuten eine Stelle 400 m unterhalb dieses Zuflußes erreicht hat. Daraus ergeben sich die in Tabelle 6 aufgeführten Fließgeschwindigkeiten:

Tab.6: Fließgeschwindigkeiten des Baches Nr.7

Abschnitt	Länge	Gefälle	Geschw.
1	200m	0.125	0.83 m/s
2	800m	0.115	1.03 m/s
3	400m	0.107	1.33 m/s

Die Zunahme der Fließgeschwindigkeit trotz abnehmendem Gefälle ist auf eine Vertiefung des Bachbettes und damit Vergrößerung des hydraulischen Radius zurückzuführen.

An diese Meßwerte wird die Fließformel von Manning- Strickler durch die Wahl von k_s = 500 mm und f = 0.45 angepaßt.

Sind nun die Durchflußmenge DM eines Baches, seine Geschwindigkeit und seine Profilparameter bekannt, so kann wegen

$$DM = \bar{v}_w A \qquad [71]$$

rekursiv auf die Tiefe des Baches geschlossen werden. Für das Kanalprofil ergibt sich die Wassertiefe h_w aus

$$h_w = \frac{DM}{2\, b\, v_w} , \qquad [72]$$

wenn b die halbe Breite der Bachsohle ist.

5.7 Abschattung

Abbildung 34,1 zeigt 2 Profile des Gletschervorfeldes, geschnitten in Ost-West-Richtung, für je einen Schnitt im unteren Teil des Geländes von der Hintergraslspitze durch die Pegelstation zum gegenüberliegenden Kamm und im oberen Teil etwa auf Höhe des Zusammenflußes der Bäche Nr.6 und 7, 600 m nördlicher.

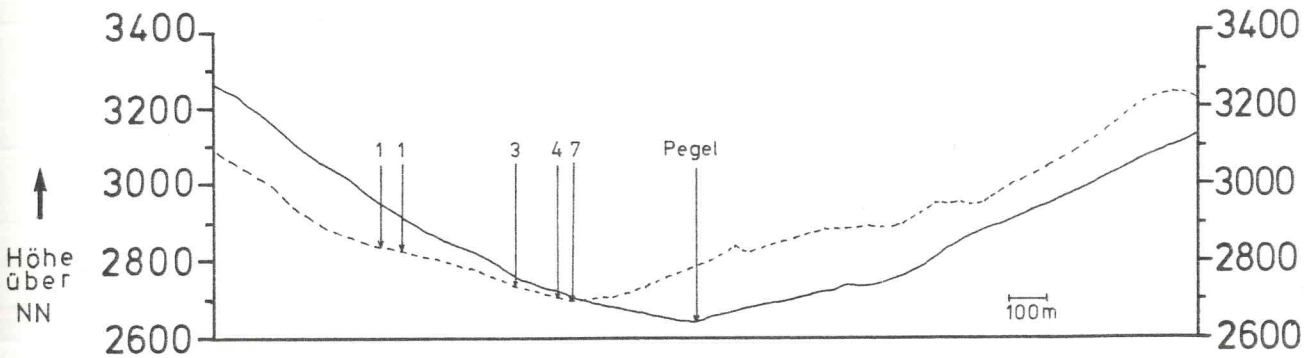


Abb.34,1 : Geländeprofile des Gletschervorfeldes

Die Abbildung verdeutlicht, daß dieses Gelände für eine sonnenstandsabhängige Tagesgangberechnung der Wassertemperatur nicht als Ebene verallgemeinert werden darf. Vielmehr muß ein Rechenverfahren entwickelt werden, das besonders in den Morgen- und Abendstunden feststellt, ob jeder Integrationsabschnitt des zu berechnenden Baches direkte Sonnenstrahlung erhält oder von einem Berg abgeschattet wird. Da jeder Bach durch die geradlinige Verbindung einer Anzahl von Punkten mit 50m Abstand dargestellt wird, entspricht dem Integrationsabschnitt eine Bachlänge von 50m. Das gesamte Bachsystem wird somit durch 90 Punkte bzw. Abschnitte repräsentiert. Dieses relativ grobe Raster mußte gewählt werden, weil die spätere Erweiterung des Rechenprogramms um den Bodenwärmestrom bei feinerer Unterteilung einen zu großen Speicherplatzbedarf bedingt hätte. Im folgenden wird daher ein zwar einfaches, dafür aber schnelles und wenig Speicherplatz benötigendes Verfahren zur Berechnung der Geländeabschattung dargelegt.

Dank des nahezu u-förmigen Profils des Gletschervorfeldes kann davon ausgegangen werden, daß eine Abschattung nur vom westlichen und

östlichen Bergkamm verursacht wird und nicht von dazwischen liegenden Geländeerhebungen. Nimmt man weiterhin an, daß die tangierenden Sonnenstrahlen den Berg auch bei verschiedenen Sonnenständen immer nur an einer einzigen Kante berühren, die aber nicht notwendigerweise die höchste Erhebung des Berges sein muß, dann lassen sich die Bergkämme wie in Abbildung 35,1 durch senkrechte Wände ersetzen, die auf den Projektionen der Kanten feststehen und dieselbe Höhe wie diese haben.

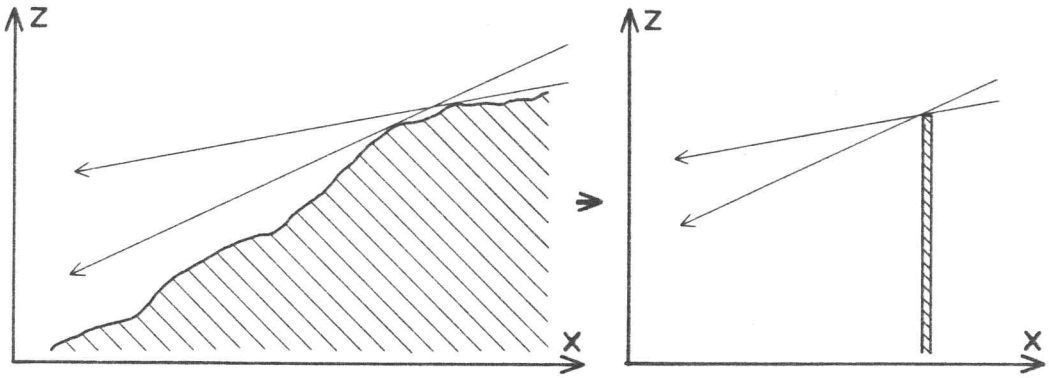


Abb.35,1 : Reduzierung der Berghänge zu Wänden

Nun wird in Abbildung 35,2 das reale Profil der Wand in einen Polygonzug zerlegt.

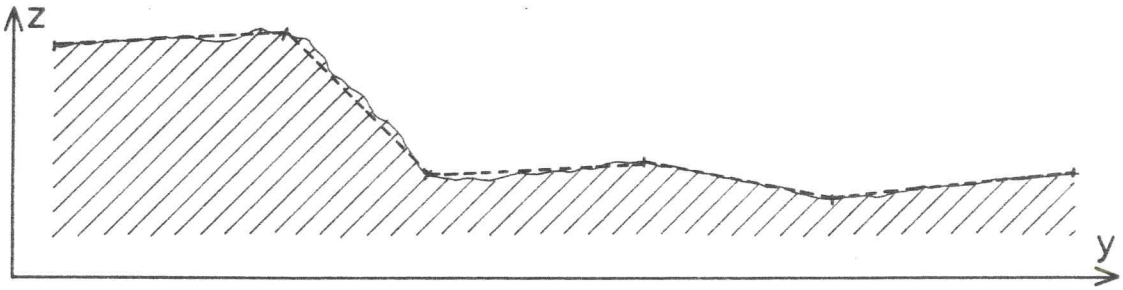


Abb.35,2: Reduzierung der Oberkante der Wand in einen Polygonzug

Auf diese Weise gelingt es, die Bergkämme mit je etwa 7 Geradenstücken anzunähern. Abschattung an einem Bachpunkt ist dann gegeben, wenn ein Sonnenstrahl auf den betreffenden Bachpunkt unterhalb der entsprechenden Wandoberkante liegt.

Wenn alle drei kartesischen Koordinaten der Bachpunkte und Wandeckpunkte bekannt sind, stellt das Verfahren zuerst fest, in welchem Sektor der Abbildung 36,1 sich zu einer bestimmten Zeit der Verbindungsstrahl Sonne-Bachpunkt befindet.

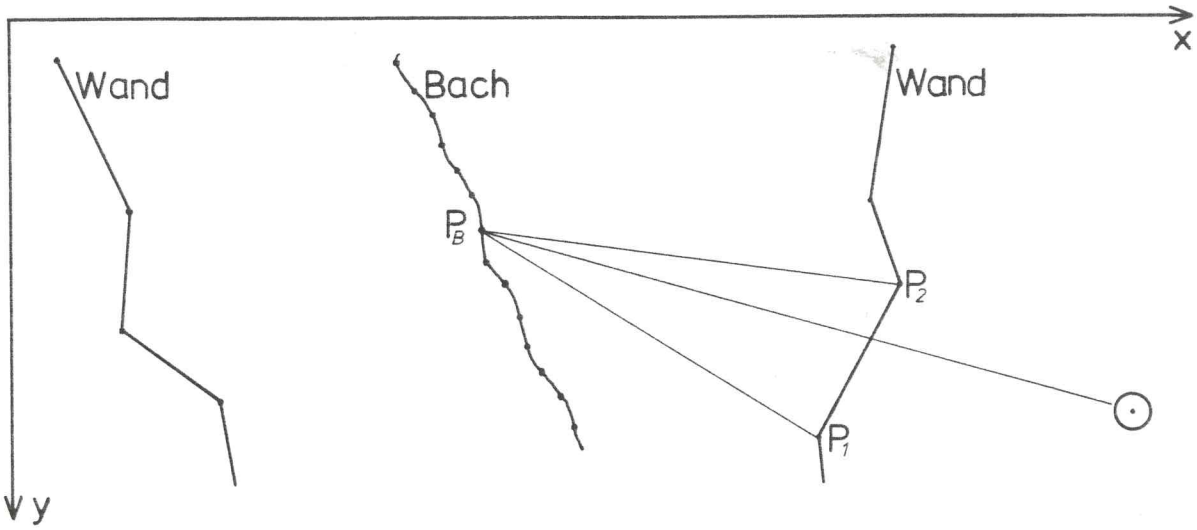


Abb.36,1: Sektoren zwischen Bachpunkten und Wand

Ein Bachpunkt habe die Koordinaten x_B, y_B, z_B. Die beiden Wandpunkte seien mit 1 und 2 indiziert.

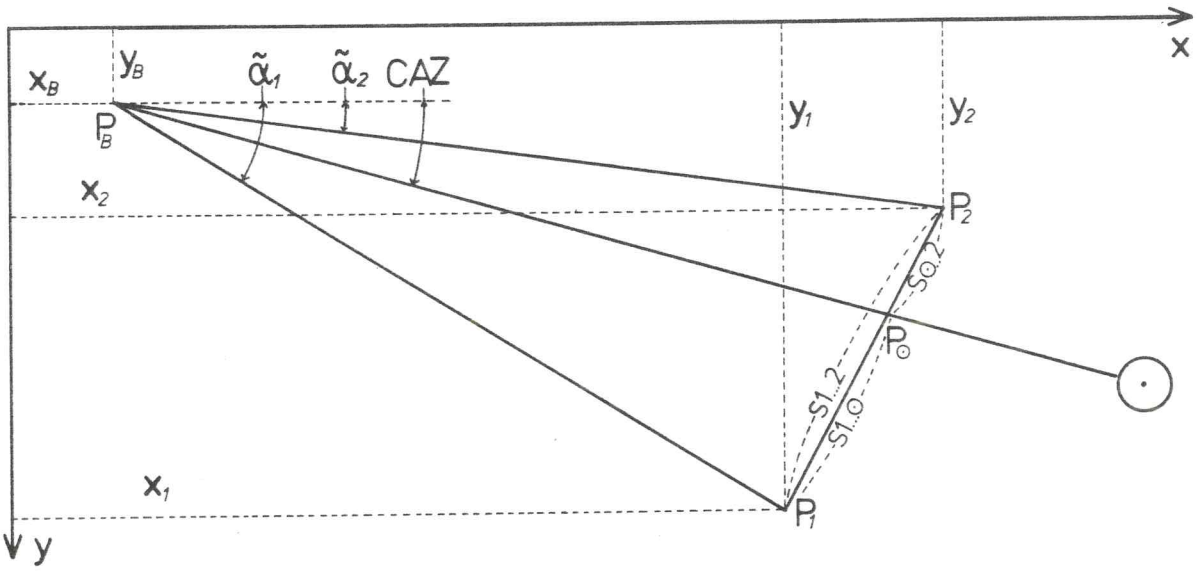


Abb. 36,2 : Projektion eines Bachpunktes und der abschattenden Wand in eine Ebene z = konstant

Mit der Definition des Azimuts

West	Süd	Ost
90°	0°	-90°

liest man aus Abbildung 36,2 für die Winkel zwischen der Ost-West-Richtung und den Verbindungsgeraden Bachpunkt-Wandpunkt ab:

$$\tilde{\alpha}_1 = -\arctan\frac{y_1 - y_B}{x_1 - x_B} \quad ; \quad \tilde{\alpha}_2 = -\arctan\frac{y_2 - y_B}{x_2 - x_B} \qquad [73]$$

Damit und mit der projizierten Länge der Verbindungsgeraden

$$S1..2 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} \qquad [74]$$

erhält man, wieder als Projektion in eine Ebene z = konstant, für die Strecken $S1..\odot$ und $S\odot..2$: $\frac{S\odot..2}{S1..2} = \frac{CAZ - \tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}$,

$$S\odot..2 = \frac{CAZ - \tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2} S1..2 \quad , \quad S1..\odot = S1..2 - S\odot..2 \quad . \qquad [75]$$

Das dreidimensionale Sektorbild 37,1 verdeutlicht die Orientierung des Verbindungsstrahles Bachpunkt-Sonne.

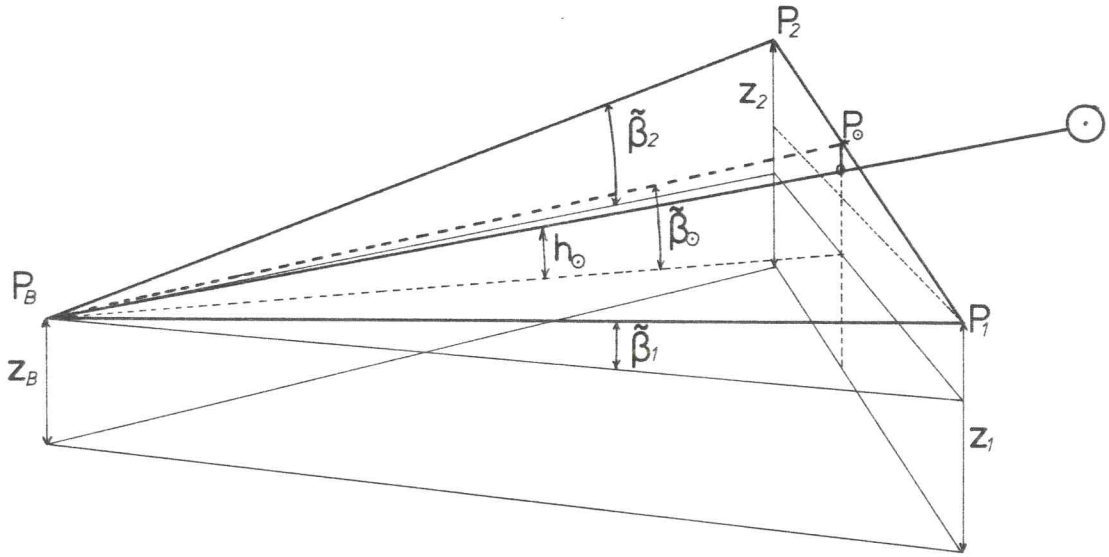


Abb.37,1 : Strahlengeometrie im Sektor der Abbildung 36,2

In Abbildung 37,1 bedeuten, jeweils vom Bachpunkt aus gesehen, $\tilde{\beta}_1$ die Höhe des Wandpunktes P_1, $\tilde{\beta}_2$ die Höhe des Wandpunktes P_2, $\tilde{\beta}_\odot$ die Höhe des Punktes $P_\odot$ in der Wandkante und $h_\odot$ die Sonnenhöhe.

Der Schnittpunkt des Verbindungsstrahles Bachpunkt-Sonne mit der Wand und die Strecken $S1..\odot$ und $S\odot..2$ erscheinen in Abbildung 38,1 besonders deutlich.

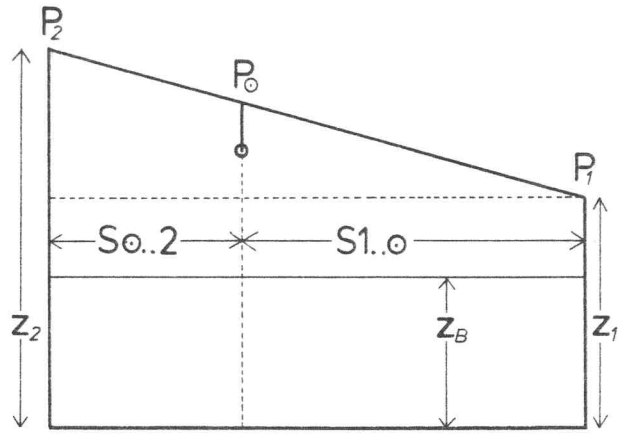


Abb.38,1 : Rechte Seite des Sektors der Abbildung 37,1

Den Abbildungen 36,2 und 38,1 werden die Winkel $\tilde{\beta}_1$ und $\tilde{\beta}_2$ entnommen:

$$\tilde{\beta}_1 = \arctan\frac{z_1 - z_B}{\sqrt{(y_1 - y_B)^2 + (x_1 - x_B)^2}} \quad ; \quad \tilde{\beta}_2 = \arctan\frac{z_2 - z_B}{\sqrt{(y_2 - y_B)^2 + (x_2 - x_B)^2}} \,. \qquad [76]$$

Daraus folgt für die Höhe $\tilde{\beta}_\odot$ des Punktes $P_\odot$, wenn $\tilde{\beta}_2$ größer als $\tilde{\beta}_1$ ist

$$\tilde{\beta}_2 > \tilde{\beta}_1 : \quad \frac{\tilde{\beta}_\odot - \tilde{\beta}_1}{\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1} = \frac{S1..\odot}{S1..2} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_\odot = \frac{S1..\odot}{S1..2}\left(\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1\right) + \tilde{\beta}_1 \,. \qquad [77]$$

Ist $\tilde{\beta}_1$ größer als $\tilde{\beta}_2$, gilt

$$\tilde{\beta}_1 > \tilde{\beta}_2 : \quad \frac{\tilde{\beta}_\odot - \tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2} = \frac{S\odot..2}{S1..2} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\beta}_\odot = \frac{S\odot..2}{S1..2}\left(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2\right) + \tilde{\beta}_2 \,. \qquad [78]$$

$\tilde{\beta}_\odot$ bezeichnet in beiden Fällen die Höhe des Punktes $P_\odot$, die von der Sonne überschritten werden muß, um vom Bachpunkt aus gesehen zu werden.

Ein Bachpunkt ist also dann im Schatten, wenn $\tilde{\beta}_\odot > h_\odot$ und wird dann besonnt, wenn gilt: $\tilde{\beta}_\odot < h_\odot$.

5.8 Ergebnise des Kanalmodells

Das Kanalmodell ist nun mit allen Größen soweit beschrieben, wie es in der Literatur über die Berechnung von Flußtemperaturen meistens anzutreffen ist. Die Berechnung des Bodenwärmestroms fehlt bisher, da viele Autoren den Bodenwärmestrom bei Flüssen als vernachlässigbar klein abschätzen und auch die Messung der Bodenkonstanten im Flußbett erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Es sei erwähnt, das eine Methode, den Bodenwärmestrom zu berechnen, in Witte,1982 für den Fluß Loisach beschrieben ist. Vorraussetzung dafür sind aber Temperaturmessungen in mehreren Bodentiefen im Flußbett. Solch eine Meßreihe ist hier nicht gegeben.

Abbildung 41,1 zeigt den Verlauf der meteorologischen Meßgrößen an der Pegelstation Vernagtbach am 19.08.1978.

Dieser Tag wurde als schöner Strahlungstag ausgewählt, um das Rechenprogramm auszutesten und den berechneten Tagesgang der Wassertemperatur an der Pegelstation mit dem bekannten gemessenen Tagesgang zu vergleichen.

Die gemessene Wassertemperatur sowie die Durchflußmenge an der Pegelstation sind in Abbildung 41,2 aufgetragen.

Das Maximum der Wassertemperatur wurde um 13.^{00} Uhr gemessen und trat damit eine Stunde später als die maximale Globalstrahlung auf.

Die Abbildung verdeutlicht, daß die Globalstrahlung jenes Glied der Energiebilanzgleichung ist, welches hauptsächlich für die Höhe der Wassertemperatur und die Ablation des Gletschers verantwortlich ist. Da nach Gleichung [1] im Kanalprofil die Wassertiefe umgekehrt proportional zur Temperaturänderung ist, sollte die von 10.^{00} bis 16.^{00} Uhr ansteigende Durchflußmenge einer Zunahme der Wassertemperatur entgegenwirken, so daß das Temperaturmaximum bei fehlendem Bodenwärmestrom nicht phasengleich mit dem Maximum der Globalstrahlung, sondern früher als 12.^{00} Uhr eintreten müßte.

Diese Überlegung wird vom gerechneten Tagesgang der Wassertemperatur bestätigt. Wird das Kanalmodell mit den ersten Profilparametern der Tabelle 7 gerechnet, die etwa den natürlichen Werten am Bachanfang entsprechen, dann erreicht die Temperatur um 11.^{00} Uhr ihr Maximum, wie die Kurve 1 der Abbildung 41,2 zeigt.

Tab.7: Konstante Breiten der Bäche, Kurvennummern in Klammern

Bach Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Breite 2b (1)	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.5	2.0
Breite 2b (2)	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.0	2.5
Breite 2b (3)	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.0	1.5

Eine Änderung der Bachbreiten auf die zweiten und dritten Werte der Tabelle 7 erhöht oder verringert nur die absolute Größe der Wassertemperatur, kann aber den Zeitpunkt des Maximums nicht verschieben.

Für die Berechnung der Wassertemperatur am Tag erweist sich das Kanalmodell hiermit als nicht geeignet.

In besserer Übereinstimmung mit gemessenen Werten stehen jedoch die gerechneten Wassertemperaturen während der Nacht. Diese 0.1-0.3°C sind hauptsächlich auf die Energiedissipation zurückzuführen und stellen sich daher unabhängig vom Bachbettprofil immer ein.

Eine Darstellung der über alle Bäche gemittelten Dissipation sowie der anderen Energiebilanzterme im Tagesverlauf befindet sich in Abschnitt 6.3 im Bild 92,1.

Um die gemessene Verschiebung des Temperaturmaximums gegen das Maximum der Globalstrahlung mit der Rechnung zu erreichen, muß von der unrealistischen Voraussetzung des kanalförmigen Bettprofiles Abstand genommen und ein neues Profil eingeführt sowie auch der Boden als Wärmespeicher mit einbezogen werden. Diese Aufgaben werden im zweiten Teil der Arbeit behandelt.

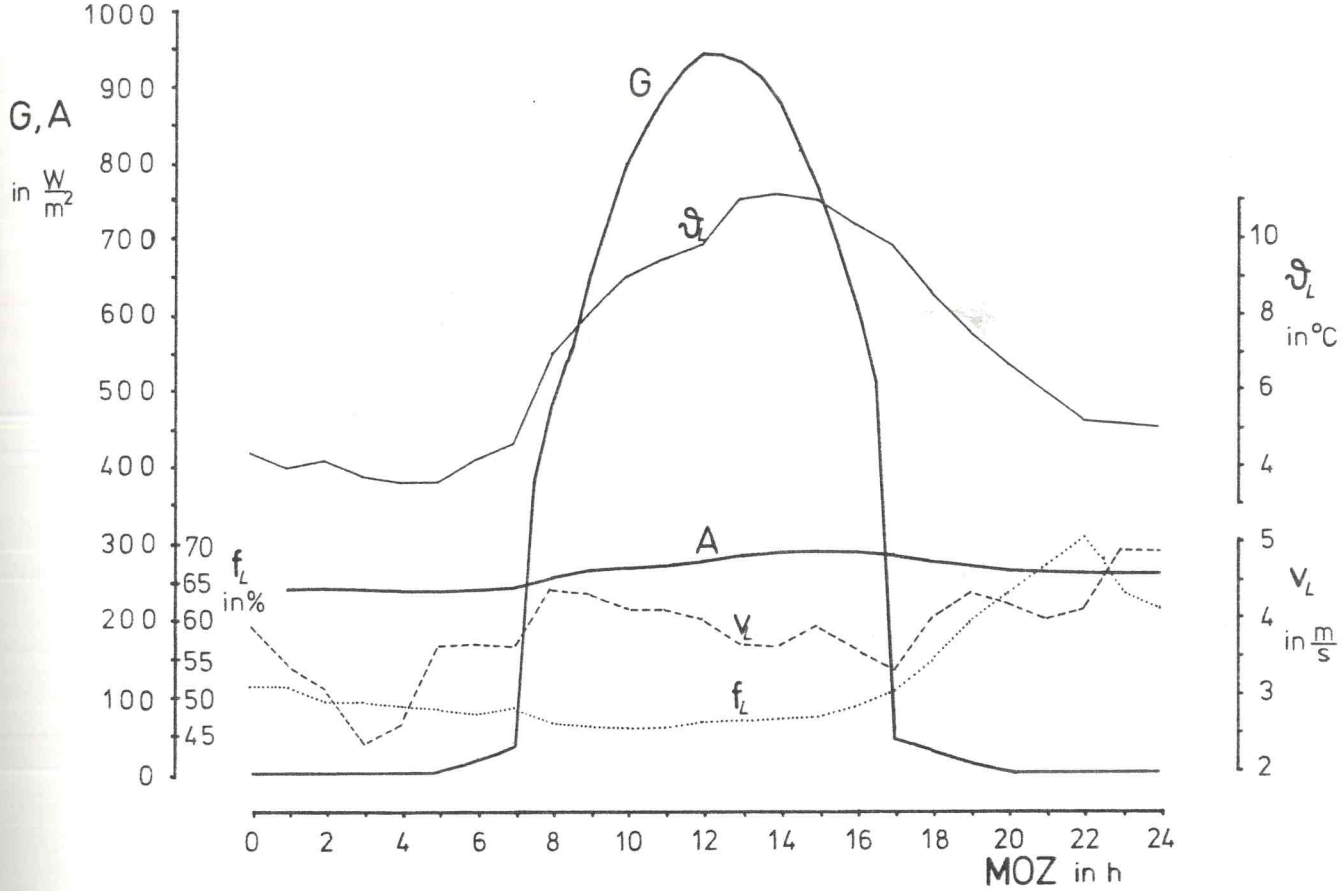


Abb. 41,1 : Tagesgang der Globalstrahlung G, Gegenstrahlung A, Lufttemperatur ϑ_L, relativen Feuchte f_L und Windgeschwindigkeit v_L vom 19.8.1978 an der Pegelstation

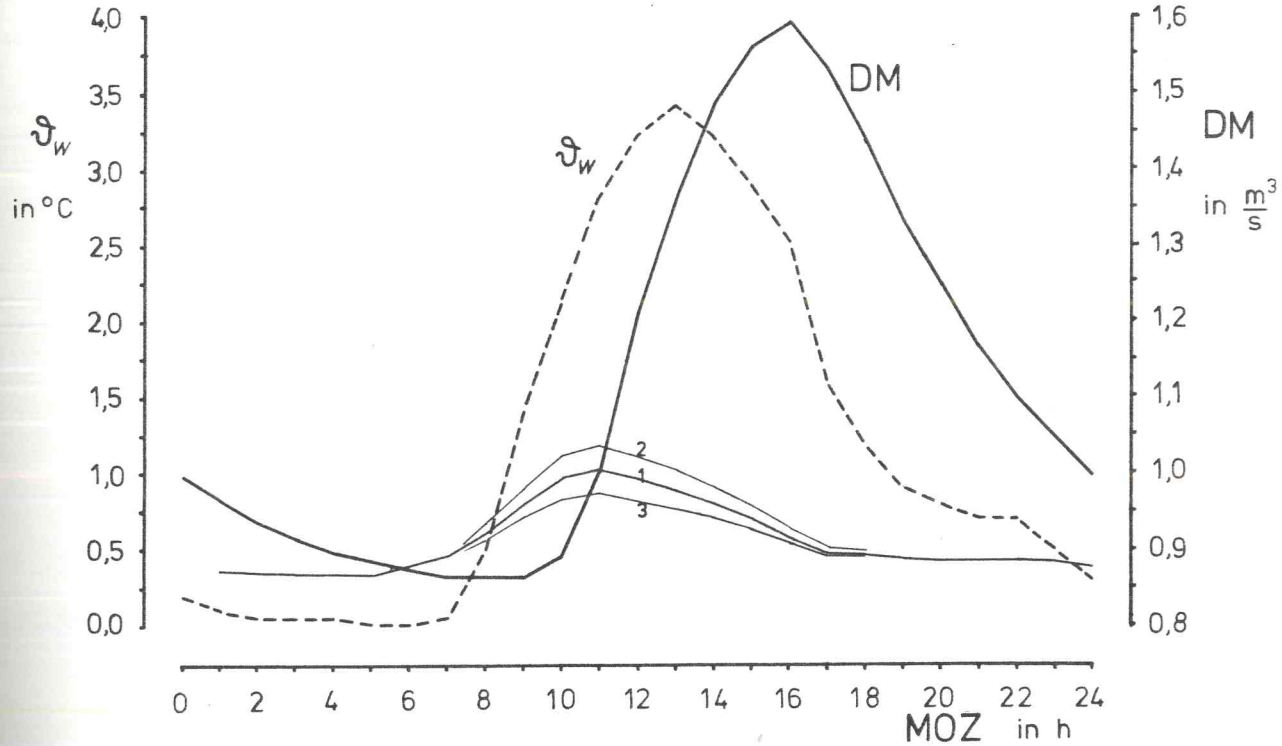


Abb. 41,2: Der gemessene Tagesgang der Wassertemperatur ϑ_W und der Durchflußmenge DM an der Pegelstation sowie gerechnete Wassertemperaturen mit Werten der Tab.7

6 Trapezprofilmodell

6.1 Variable Bachbettprofilierung, Dispersionsansatz

Für das Bachsystem des Vernagtferners ist ein rechteckiges, kanalförmiges Bettprofil eine nur sehr unvollkommene Annäherung an wirkliche Verhältnisse. Die kanaltypische, unwesentliche Verbreiterung der Wasseroberfläche bei zunehmender Wassertiefe würde, wenn überhaupt, am ehesten auf den Hauptbach Nr.7 ab dem Zusammenfluß mit Bach Nr.5 und auf einige Abschnitte von Bach Nr.6 zutreffen. In allen anderen Bereichen fließt das Wasser bei großen Durchflußmengen nicht nur in einem einzigen, definierbaren Bachbett, sondern gleichzeitig in mehreren nebeneinander. Dies ist auch auf der Fotographie des Vorfeldes, Abbildung 3,1, gut zu erkennen. So spaltet sich der Bach Nr.3 schon 50 m vor der Einmündung in Nr.4 deutlich in mindestens drei Arme auf. Tatsächlich zeigte eine Begehung des Geländes, daß auch das Gebiet zwischen diesen Armen mit talwärts fließendem Wasser gefüllt und deshalb mit gewöhnlichem Schuhwerk unpassierbar war, obwohl die Tiefe dieses Wassers nur wenige Millimeter betrug. Solche Stellen, an denen das Wasser großflächig mit geringer Tiefe und verlangsamter Geschwindigkeit zu Tal fließt, sind mehrfach, so auch am Ende der Bäche Nr.4 und 5 vorhanden. Stichprobenartige Messungen der Wassertemperatur an der erstgenannten Stelle zeigten je nach Länge des bisher überflossenen Gebietes Temperaturüberhöhungen um einige Kelvin gegenüber der Wassertemperatur im regulären Bachbett. Nun treten solche Überflutungen aber nicht immer auf, sondern nur dann, wenn die Durchflußmenge des betreffenden Baches einen bestimmten, unbekannten Wert überschreitet. Deswegen wird hier kein Versuch gemacht, diese Besonderheiten mathematisch zu formulieren. Andererseits muß aber eine wirklichkeitsnahe Profilierung der Bachbetten angestrebt werden, da die Bäche, außer an den obengenannten Stellen, bei steigendem Wasserspiegel tatsächlich breiter werden und ihre Austauschfläche für Wärmeströme vergrößern. Daher wurde für das gesamte Bachsystem das in Abbildung 43,1 gezeigte Bachbett verwendet.

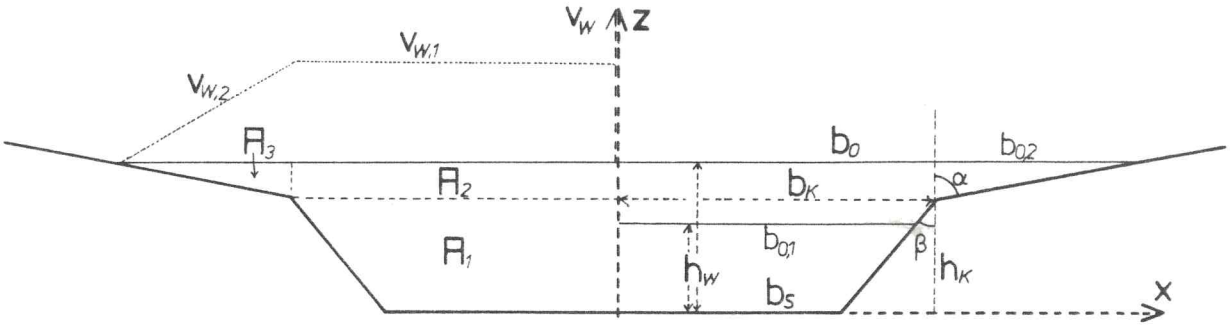


Abb.43,1 : Das für alle Bäche verwendete Trapezprofil

Aus Symmetriegründen sind alle Größen auf die rechte Bachhälfte bezogen. Sie bedeuten im einzelnen: b_0 die Wasseroberflächenbreite von der Mitte bis zum Wasserrand, b_K die Entfernung des Uferknickes von der Bachmitte, $2b_S$ die Sohlenbreite, h_w die Wassertiefe, h_K die Knickhöhe, A_1 die Querschnittsfläche zwischen Sohle und Wasseroberfläche, wenn die Wassertiefe die Knickhöhe nicht überschreitet, A_2 die Querschnittsfläche zwischen Knickhöhe und Wasseroberfläche, von Bachmitte bis zur Breite des Knickes, A_3 die Querschnittsfläche zwischen Ufersohle und Wasseroberfläche, ab der Breite des Knickes bis zum Wasserrand, $v_{w,1}$ die Fließgeschwindigkeit im Mittelteil des Baches, $v_{w,2}$ die zum Ufer hin abnehmende Fließgeschwindigkeit im flachen Randteil des Baches und α , β die Böschungswinkel des Bachbettes.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für die zwei vorkommenden Fälle, Wasserspiegel tiefer oder höher als die Knickhöhe:

$$h_w < h_K : \quad A_1 = h_w\left(b_S + \frac{h_w \tan\beta}{2}\right); \quad A_2 = 0 \; ; \; A_3 = 0$$

$$b_0 = b_S + h_w \tan\beta \qquad [79]$$

$$h_w > h_K : \quad A_1 = h_K\left(b_S + \frac{h_K \tan\beta}{2}\right); \quad A_2 = (h_w - h_K)(b_S + h_K \tan\beta)$$

$$A_3 = (h_w - h_K)^2 \cdot \frac{\tan\alpha}{2} \qquad [80]$$

$$b_0 = b_S + h_K \tan\beta + (h_w - h_K)\tan\alpha \quad .$$

Das Bett weist eine ebene Sohle und in der Uferböschung einen Knick auf. Mit der Höhe des Knickes und den Böschungswinkeln α und β läßt sich das Überflutungsverhalten des Baches in weiten Grenzen steuern. Sohle und Ufer werden als rauhe Flächen angesehen.

Dieses Profil ist eine idealisierte Form des natürlichen Bachbettes, das ausnahmslos mit Steinen und Felsstücken aller Größen angereichert ist. Aufgrund der starken Turbulenzen des Wassers werden die großen, aus dem Wasser ragenden Steine in beobachtbaren Zeitabständen je nach Durchflußmenge mehr oder weniger vollständig vom Wasser überflutet. Das gleiche geschieht mit den kleineren Steinen im Uferbereich. Dieses natürliche Fließverhalten, das für die Berechnung der Wassertemperatur die Wirkung einer Verringerung der Wassertiefe und Vergrößerung der Wasseroberfläche hat, muß im Modell durch entsprechende Wahl der Profilparameter nachgeahmt werden. Deshalb werden die Maße eines in der Natur eventuell auffindbaren ähnlichen Profils nicht mehr mit den Modellabmessungen übereinstimmen können, sobald sich große Fremdkörper im Bachbett befinden. Die Parameter des Bachbettprofils sind also im Rahmen einer späteren Eichung zu ermitteln.

Nun läßt sich beobachten, wie bei natürlichen Fließgewässern die Geschwindigkeit des Wassers im flachen Uferbereich abnimmt. Bei Flüssen kann sich sogar eine Rückströmung ausbilden. Auf eine einheitliche Fließlänge bezogen, hat damit das langsamer fließende Uferwasser länger Anteil am Energieaustausch durch seine Oberfläche als das schneller fließende Wasser im Bachmittelbereich. Die Temperatur des Uferwassers wird daher im allgemeinen von der Wassertemperatur in Bachmitte verschieden sein, was durch stichprobenartige Messungen auch bestätigt wurde.

Weiterhin fließt das Uferwasser nun nicht in einheitlichen Paketen von der Hauptströmung unabhängig talwärts, sondern durchmischt sich ständig mit dem Wasser im Mittelbereich. Dieser Vorgang wird von der Geschwindigkeitsdispersion des Baches verursacht, die wiederum eine Folge der Bachbettrauhigkeit ist. So kann auch die Dispersion dazu beitragen, den Tagesgang der Wassertemperatur an der Pegelstation zu beeinflußen. Allerdings ist es hier nicht so einfach wie bei den anderen Wärmeströmen, diesen Einfluß abzuschätzen und etwa in Einheiten

einer äquivalenten Wärmestromdichte anzugeben, da hier neben der Berücksichtigung des Wärmehaushaltes auch noch das genannte Profilierungsproblem eingeht.

Somit wird folgender Musterbach modelliert:

Bei geringen Wassertiefen befindet sich der Wasserspiegel unterhalb des Uferknickes. Die Fließgeschwindigkeit ist über die gesamte Breite konstant $v_{w,1}$. Es findet keine Dispersion statt.

Nach Gleichung [1] wird die Temperaturänderung dT_w/dt eines Wasservolumens $O\bar{h}_w$ verursacht von der durch die Oberfläche O des Volumens fließenden Summe der Wärmeströme

$$\rho_w c_w O \bar{h}_w \frac{dT_w}{dt} = O \sum \Pi \quad . \qquad [81]$$

ρ_w ist wieder die Dichte des Wassers, c_w seine spezifische Wärmekapazität, $\bar{h}_w$ die mittlere Tiefe des Volumens und $\sum \Pi$ die Summe der Wärmeströme, wobei hier der Bodenwärmestrom außer acht gelassen wird. Die Kürzung der Oberfläche O läßt auf beiden Seiten der Gleichung [81] allein $\bar{h}_w$ als räumliche Größe zurück

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{1}{\rho_w \bar{h}_w c_w} \sum \Pi \quad . \qquad [82]$$

Zur Bestimmung der mittleren Wassertiefe wird der Quotient aus der Wasseroberfläche O und dem darunterliegenden Wasservolumen V benötigt, der im Querschnittsbild dem Quotienten aus Wasseroberflächenbreite b_o und Querschnittsfläche A entspricht

$$\frac{1}{\bar{h}_w} = \frac{O}{V} = \frac{b_o}{A} \quad . \qquad [83]$$

Hier ergibt Gleichung [81] für den Fall, daß die Wasseroberfläche unterhalb der Höhe des Knickes liegt, als Temperaturänderung

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{b_{o,1}}{\rho_w A_1 c_w} \sum \Pi \quad . \qquad [84]$$

Bei zunehmender Durchflußmenge steigt der Wasserspiegel über den Uferknick und die Bachbreite nimmt nun stärker zu. Gleichzeitig soll die Fließgeschwindigkeit linear abnehmen vom Wert der Hauptströmung, $v_{w,1}$, bis auf 0 am Wasserrand. Es findet Dispersion statt und das Wasser wird ständig vollkommen durchmischt. In diesem Fall sind zwei Bereiche mit eigenen Fließgeschwindigkeiten, Durchflußmengen und Temperaturänderungen zu unterscheiden.

Bereich I : Hauptströmung, von Bachmitte bis Knickbreite

Fließgeschwindigkeit : $v_{w,1}$ = konstant

Durchflußmenge : $DM_1 = (A_1 + A_2)\, v_{w,1}$

Temperaturänderung : $\Delta T_{w,1} = \frac{\Delta t_1}{\rho_w c_w} \frac{b_{0,1}}{A_1 + A_2} \Sigma \Pi$

Bereich II: Uferströmung, von Knickbreite bis Rand

Fließgeschwindigkeit : $\bar{v}_{w,2} = \bar{v}_{w,1} / 2$

Durchflußmenge : $DM_2 = \bar{v}_{w,2} A_3$

Temperaturänderung : $\Delta T_{w,2} = \frac{\Delta t_2}{\rho_w c_w} \frac{b_{0,2}}{A_3} \Sigma \Pi$

mit $\Delta t_2 = 2 \Delta t_1$

Die Temperatur nach dem Durchmischen zweier Fließgewässer verschiedener Temperaturen T_w und Durchflußmengen DM erhält man aus

$$T_w = \frac{DM_1\, T_{w,1} + DM_2\, T_{w,2}}{DM_1 + DM_2} \quad , \qquad [85]$$

so daß sich schließlich für den Bach als Temperaturänderung

$$\Delta T_w = \frac{DM_1\, \Delta T_{w,1} + DM_2\, \Delta T_{w,2}}{DM_1 + DM_2} =$$

$$= \left[(A_1 + A_2)\, \bar{v}_{w,1} \frac{\Delta t_1}{\rho_w c_w} \frac{b_{0,1}}{A_1 + A_2} \Sigma \Pi + A_3 \frac{\bar{v}_{w,1}}{2} \frac{2 \Delta t_1}{\rho_w c_w} \frac{b_{0,2}}{A_3} \Sigma \Pi \right] \Big/ \left[\bar{v}_{w,1} \left(A_1 + A_2 + \frac{A_3}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{\Delta t_1}{\rho_w c_w} \frac{b_{0,1} + b_{0,2}}{A_1 + A_2 + (A_3/2)} \Sigma \Pi \qquad [86]$$

ergibt.

Die Dispersion ist in diesem Ansatz von der Fließgeschwindigkeit unabhängig und die Durchmischung eindeutig vom Profil des Bachbettes bestimmt. Beim Übertritt des Wassers über das reale Ufer wird hier also mit derselben Formel gerechnet wie beim Rechteckkanal, nur daß an Stelle der mittleren Tiefe $\bar{h}_W$ eine reduzierte Tiefe h_r verwendet werden muß, die sich aus

$$h_r = \frac{A_1 + A_2 + \frac{A_3}{2}}{b_{0,1} + b_{0,2}} \qquad [87]$$

ergibt.

Je weiter das flache Ufer überspült wird, also die Querschnittsfläche A_3 zunimmt, desto stärker differiert h_r von $\bar{h}_W$. Wie in Abschnitt 6.3 gezeigt wird, kann die Verwendung von $\bar{h}_W$ anstatt von h_r eine Differenz der Wassertemperaturen verursachen, die deutlich über der Meßgenauigkeit liegt und damit feststellbar ist. Der Dispersionsansatz nach Gleichung [87] ist demnach als ein wirksamer Faktor für die Berechnung der Wassertemperatur anzusehen und kann bei den hier betrachteten geringen Temperaturdifferenzen keinesfalls vernachlässigt werden.

6.2 Der Bodenwärmestrom

Die nähere Umgebung der Bäche sowie das gesamte Vorfeld des Gletschers wird durch eine vegetationslose und mit Steinen und Felsstücken bedeckte Fläche gebildet. Auf diese wirken, wie auf die Wasseroberfläche, Wärmeströme ein, die eine bestimmte Bodenoberflächentemperatur zur Folge haben. Aber im Gegensatz zur bewegten Wasseroberfläche, die für die Dauer des Fließvorganges vom Gletscheraustritt bis zur Pegelstation am Wärmeaustausch teilnimmt und damit stets mit derselben Temperatur von 0°C beginnt, summieren sich beim unbeweglichen Boden die Auswirkungen früherer Wärmebilanzen, die sich als Temperaturwellen ins Bodeninnere hinein fortsetzen. Die Ausbreitungsrichtung dieser Temperaturwellen stimmt überein mit der Richtung des Bodentemperaturgradienten, also mit der Richtung, die die größte Änderung der Bodentemperaturen angibt. Abbildung 48,1 zeigt den prinzipiellen Verlauf von Isothermen und Wärmestromlinien des Bodens in der Nähe des Bachufers.

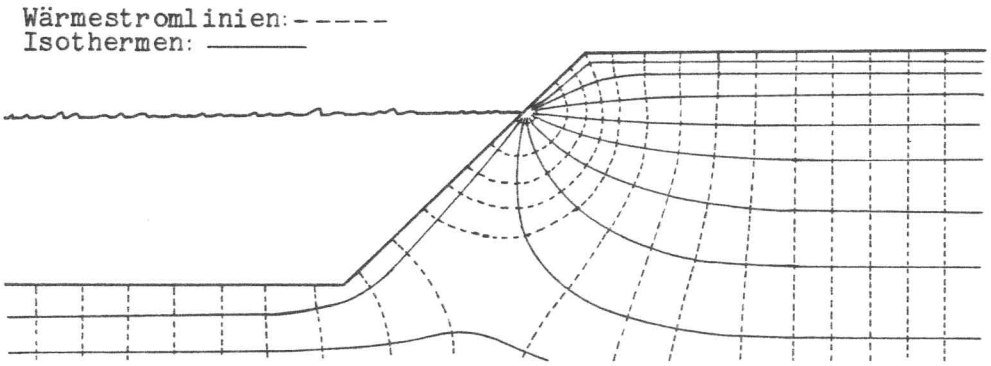


Abb. 48,1 : Die instationären Wärmestrom- und Isothermenfelder des Bodens

Der Bodenwärmestrom steht überall senkrecht auf den Isothermen. Deshalb wird sich eine Änderung der Oberflächentemperatur, die weit genug vom Bachbett entfernt stattfindet, meistens senkrecht zur Oberfläche ausbreiten, in der Nähe des Baches aber eine horizontale Komponente aufweisen. Das Bachwasser wird daher vom Energieaustausch der nahegelegenen Bodenoberfläche mit der Atmosphäre profitieren und durch die Grenzfläche Wasser-Boden wird ein Wärmestrom fließen. Die

Bestimmung des Bodenwärmestromes als Funktion von Bodenoberflächentemperatur und Bachbettprofil zeigt dieses Kapitel.

Für die folgenden Berechnungen wird der Boden als halbunendlich ausgedehnter, homogener und isotroper Körper mit ebener Grenzfläche approximiert. Die Grenzfläche wird durch die Bodenoberfläche realisiert und hat zu bekannten Zeiten t_j die Temperaturen T_j, die entweder gemessen oder über eine Wärmehaushaltsgleichung berechnet werden können. Der Tagesgang der Oberflächentemperaturen verläuft mehr oder weniger wellenförmig und es werden zunächst zwei Methoden vorgestellt, die es gestatten, das Vordringen der Temperaturwelle ins Körperinnere zu berechnen.

6.2.1 Harmonische Analyse

Das Verfahren der angenäherten harmonischen Analyse löst die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für den Fall, daß die Oberflächentemperaturfunktion periodisch in der Zeit ist und der Körper sich im eingeschwungenen Zustand befindet. Eingeschwungen bedeutet hier, daß sich zwei aufeinander folgende Perioden der Temperaturschwingung nicht mehr unterscheiden. Nachfolgend werden ohne Herleitung die Beziehungen zusammengestellt, die zur Berechnung der Temperatur $T(z,t)$ in der Tiefe z und zur Zeit t benötigt werden.

Die Synthese des Oberflächentemperaturverlaufs lautet

$$T(0,t) = T_m + \sum_{i=1}^{m'} A_i \cos(i\omega t - \varepsilon_i) \quad ; \quad A_i = \sqrt{a_i'^2 + b_i'^2} \, , \qquad [88]$$

wobei

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_i = \arctan(b_i'/a_i') & \text{, wenn} & a_i' > 0 \\ \varepsilon_i = \pi + \arctan(b_i'/a_i') & \text{, wenn} & a_i' < 0 \end{array}\right\} \; b_i' = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_i = \pi/2 & \text{, wenn} & b_i' > 0 \\ \varepsilon_i = 3\pi/2 & \text{, wenn} & b_i' < 0 \end{array}\right\} \; a_i' = 0$$

$$a_i' = \frac{2}{n'} \sum_{j=0}^{n'-1} T_j \cos\left(i \frac{2\pi j}{n'}\right) \qquad T_m = \frac{1}{n'} \sum_{j=0}^{n'-1} T_j$$

$$b_i' = \frac{2}{n'} \sum_{j=0}^{n'-1} T_j \sin\left(i \frac{2\pi j}{n'}\right)$$

ist.

In diesen Gleichungen bedeutet A_i die Temperaturamplitude des i-ten Reihengliedes, ε_i die Phasenverschiebung des i-ten Reihengliedes, a'_i, b'_i sind Fourierkoeffizienten, T_j die gemessene Oberflächentemperatur zum Zeitpunkt $t_j = j \frac{t_{per}}{n'}$, t_{per} die Periodendauer, hier ein Tag, T_m die Mitteltemperatur der T_j in t_{per}, m' die Anzahl der berücksichtigten Reihenglieder, $m' = \text{entier}(n'/2)$, n' die Anzahl der in gleichen Zeitabständen gemessenen Oberflächentemperaturen und $\omega = 2\pi/t_{per}$ die Kreisfrequenz.

Die Temperaturverteilung im Bodeninneren ist dann

$$T(z,t) = T_m + \sum_{i=1}^{m'} A_i \exp\left\{-z\sqrt{\frac{i\omega}{2\varkappa}}\right\} \cos\left\{i\omega t - z\sqrt{\frac{i\omega}{2\varkappa}} - \varepsilon_i\right\}. \quad [89]$$

Wegen

$$q(z,t) = -\lambda_B \frac{dT(z,t)}{dz} \quad [90]$$

mit der Wärmestromdichte q, der Wärmeleitfähigkeit des Bodens λ_B und der Temperaturleitfähigkeit $\varkappa$ folgt daraus für die Dichte des Wärmeflußes an der Oberfläche:

$$q(0,t) = \lambda_B \sum_{i=1}^{m'} A_i \sqrt{\frac{i\omega}{2\varkappa}} \cos\left(i\omega t - \varepsilon_i + \frac{\pi}{4}\right). \quad [91]$$

Diese Zusammenstellung geben Neiß u.Winter,1976 an.

Die Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Temperaturverläufen wird umso besser sein, je mehr Reihenglieder berücksichtigt werden. Jedoch ist deren Anzahl m' nach oben hin eine Grenze gesetzt durch die Anzahl n' der gemessenen Temperaturen T_j. Abbildung 51,1 zeigt einen gerechneten Jahresgang von Temperaturen und Wärmestromdichten an der Oberfläche, wobei für 20 Fourierreihenglieder mindestens 40 Stützstellen erforderlich waren. Deutlich ist eine Phasenverschiebung der Temperatur- und Wärmestrommaxima gegeneinander zu erkennen. Beide Kurven können aber keine Tagesschwankungen wiedergeben. Dies gelingt schon eher dem gerechneten Temperaturverlauf in Abbildung 51,2, diesmal für 0,5 m Bodentiefe. Hier wurden 182 Reihenglieder (364 Stützstellen, ≙1/Tag) verwendet, und die Übereinstimmung mit dem gemessenen Temperaturverlauf in der gleichen Tiefe kann als gut bezeichnet werden.

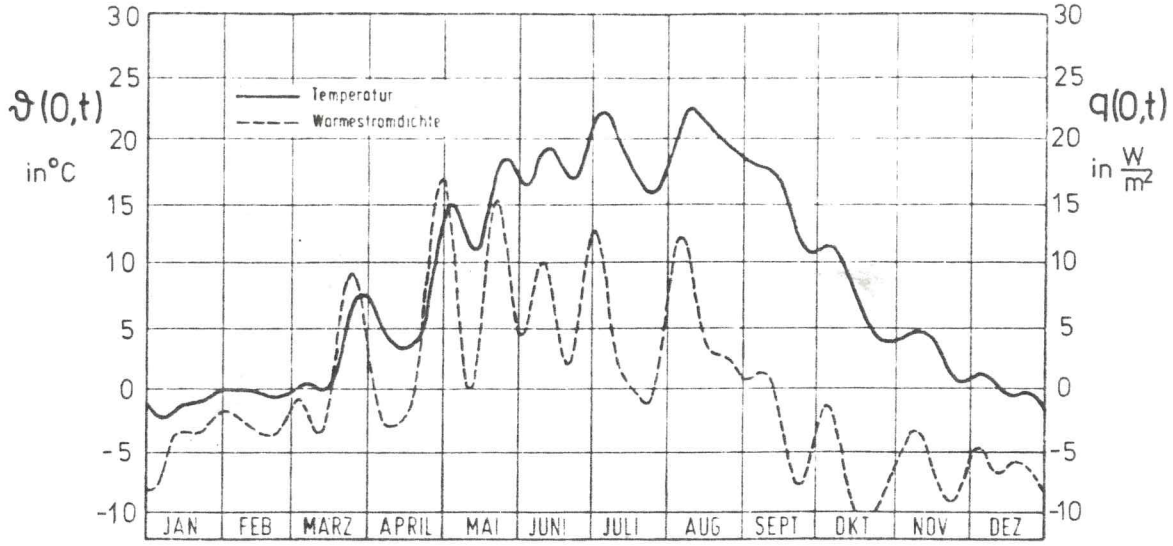


Abb.51,1 : Temperaturverlauf und Wärmestromdichte an der Bodenoberfläche für 20 Fourierreihenglieder

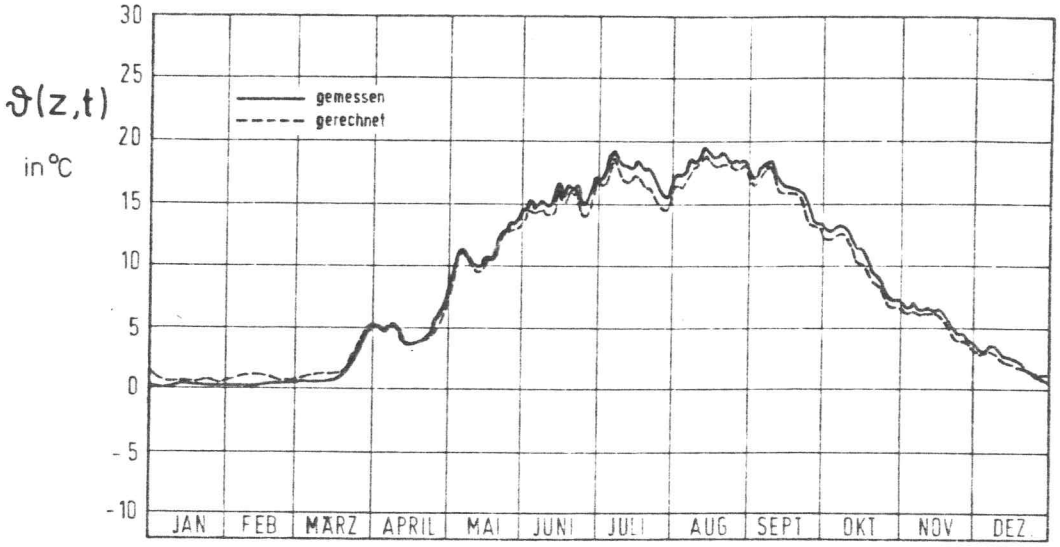


Abb.51,2: Gemessener und gerechneter Temperaturverlauf in 0.5 m Bodentiefe für 182 Fourierreihenglieder

Verläuft die Oberflächentemperatur in einer Periode genau sinus- oder cosinusförmig

$$T(0,t) = T_m \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(2\frac{\pi}{t_{per}}t\right) \qquad [92]$$

dann wird die Temperatur im Erdinneren nach Gröber,Erk,Grigull,1961

berechnet zu

$$T(z,t) = T_m \exp\left\{-z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}}\right\} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\} . \qquad [93]$$

Die Wärmestromdichte erhält man daraus als

$$q(z,t) = -\lambda_B \frac{dT(z,t)}{dz} =$$

$$= \lambda_B T_m \sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} \exp\left\{-z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}}\right\} \left[\sin\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\} \pm \cos\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\}\right] . \qquad [94]$$

An der Bodenoberfläche beträgt dann der Wärmefluß

$$q(0,t) = \lambda_B T_m \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa t_{per}}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{2\pi\frac{t}{t_{per}} + \frac{\pi}{4}\right\} \qquad [95]$$

und läuft somit der Temperatur um eine achtel Wellenlänge voraus. Bei einem Tag von 24 Stunden Dauer wird das Temperaturmaximum um 24/8 = 3 Stunden später auftreten als das Maximum der Wärmestromdichte. Abbildung 52,1 zeigt den nach Gleichung [93] berechneten prinzipiellen Verlauf der Temperatur im Boden.

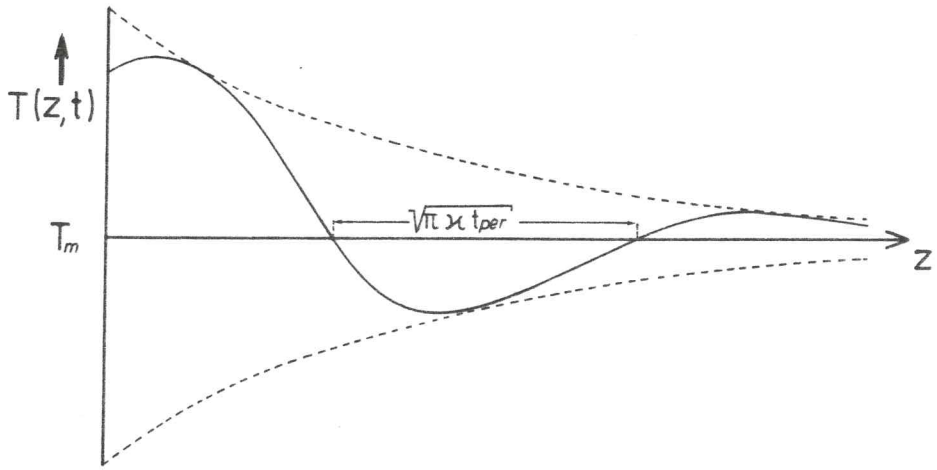


Abb.52,1 : Bodentemperaturen bei cosinusförmiger Oberflächentemperatur

In diesem Idealfall des (co)sinusförmigen Oberflächentemperaturverlaufs und unter der Bedingung des homogenen, isotropen und halbunendlich ausgedehnten Bodens stellen die angegebenen Beziehungen die exakten Lösungen des eingeschwungenen Zustandes dar. Sie sollen im weiteren dazu benutzt werden, um die Ergebnisse des anschließenden zweiten Verfahrens zur Berechnung der Bodentemperaturen zu überprüfen.

6.2.2 Wärmeleitung mit der Gauß'schen Fehlerfunktion

Der typische Anwendungsfall für die Gauß'sche Fehlerfunktion bzw. Errorfunktion entsteht bei einer einmaligen, sprunghaften Änderung der Oberflächentemperatur eines halbunendlich ausgedehnten, homogenen Körpers. Der Körper, hier der Erdboden mit einheitlich angenommener Struktur, habe überall die Temperatur T_0. Zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird die Oberflächentemperatur plötzlich auf den Wert $T_c \neq T_0$ gebracht und konstant gehalten. Der dann einsetzende Temperaturausgleichsprozeß wird in Abbildung 53,1 dargestellt und exakt von der Gleichung [96] beschrieben:

$$T(z,t) = T_c - (T_c - T_0)\,\mathrm{erf}\left[z/\sqrt{4\varkappa(t-t_0)}\right]. \qquad [96]$$

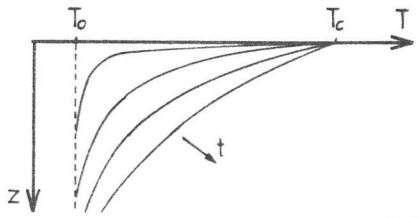


Abb.53,1 : Temperaturverlauf im Boden nach einem Temperatursprung an der Oberfläche

Hier ist T_0 die Anfangstemperatur, T_c die Endtemperatur nach unendlich langer Zeit und $\mathrm{erf}[x]$ ist die Errorfunktion, die im Anhang auf Seite A1 näher erklärt wird.

Der einfache Ansatz [96] zur Wärmeübertragung erfüllt die Wärmeleitungsgleichung:

$$\dot{T} = \varkappa \nabla^2 T \qquad [97]$$

Es ist $\dot{T} = \partial T/\partial t$ die zeitliche Ableitung der Temperatur und

$$\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2$$

der auf die Temperatur angewendete Laplaceoperator. Wegen

$$\frac{d}{dx}\mathrm{erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}; \quad \frac{d}{dx}\mathrm{erf}[cx] = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}e^{-c^2x^2}$$

gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(T_0 - T_c)\frac{z}{t\sqrt{4\pi\varkappa t}}e^{-z^2/(4\varkappa t)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = (T_0 - T_c)\frac{2}{\sqrt{4\pi\varkappa t}}e^{-z^2/(4\varkappa t)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = (T_0 - T_c)\frac{-2z}{\sqrt{\pi\varkappa t}\,4\varkappa t}e^{-z^2/(4\varkappa t)}$$

$$-(T_0 - T_c)\frac{z}{t\sqrt{4\pi\varkappa t}}e^{-z^2/(4\varkappa t)} = \varkappa(T_0 - T_c)\frac{-2z}{\sqrt{\pi\varkappa t}\,4\varkappa t}e^{-z^2/(4\varkappa t)}$$

q.e.d.

Nun wird ein Verfahren entwickelt, mit welchem der Grundansatz [96] auf beliebige Schwankungen der Oberflächentemperatur angewendet werden kann. Dazu wird nicht mehr ein einmaliger Temperatursprung betrachtet, sondern vorerst eine cosinusförmige Temperaturschwingung um den Mittelwert T_m im eingeschwungenen Zustand zugrunde gelegt:

$$T(0,t) = T_m \cos\left(2\pi \frac{t}{t_{per}}\right) \qquad [98]$$

Hier ist wieder $T(z,t)$ die Temperatur in der Tiefe z zur Zeit t, T_m der Mittelwert der Oberflächentemperatur und t_{per} die Dauer einer Periode. Mit den früheren Randbedingungen ist die Temperatur in einer Tiefe z wegen Gleichung [93] genau bekannt,

$$T(z,t) = T_m \exp\left\{-z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa\, t_{per}}}\right\} \cos\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa\, t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\}. \qquad [99]$$

Um diese Lösung mit der Methode der Errorfunktion zu approximieren, wird von folgender Überlegung ausgegangen:

Die cosinusförmige Oberflächentemperaturschwingung muß in eine Treppenfunktion mit ausreichend kleiner Schrittweite zerlegt werden. Wenn die Periodendauer z.B. t_{per} = 24 Stunden beträgt, bietet sich als Schrittweite die Zeit von 1 Stunde an. Die kontinuierliche Änderung der Oberflächentemperatur geht damit in eine sprunghafte über, wobei wegen der besseren integralen Annäherung der Cosinusfunktion durch die Treppenfunktion die Temperatursprünge jeweils um eine halbe Schrittweite früher anzusetzen sind, wie in Abbildung 54,1 gezeigt wird. Dann erhält man die Bodentemperatur in der Tiefe Z und zur Zeit t, wenn auf jeden einzelnen Temperatursprung der Grundansatz [96] angewendet und die Summe über die entsprechenden Laufzeiten gebildet wird. Die Frage, welche Laufzeiten wie lange für bestimmte Tiefen berücksichtigt werden müssen, wird später erörtert. So ergibt sich

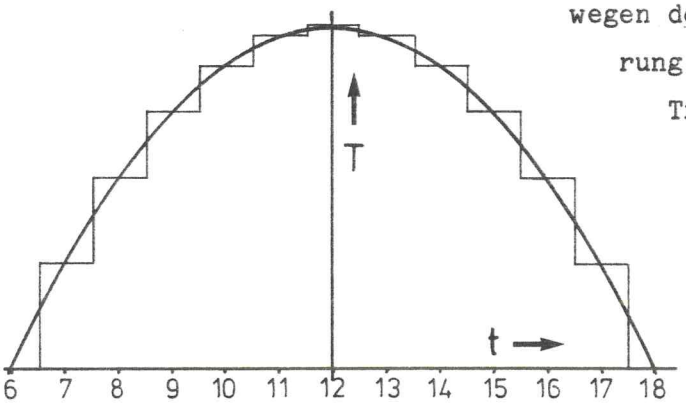


Abb. 54,1 : Stufenförmige Approximation

folgender Algorithmus, wenn die Berechnung bei $t = 6h$ mit der Schrittweite 1h beginnen soll und alle früheren Ereignisse nicht beachtet werden:

Zeit	Temperatur in der Tiefe z
6	$T(z,6) = T_6$
7	$T(z,7) = (T_6 - T_7)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 0{,}5}] + T_7$
8	$T(z,8) = (T_6 - T_7)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 1{,}5}] + (T_7 - T_8)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 0{,}5}] + T_8$
9	$T(z,9) = (T_6 - T_7)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 2{,}5}] + (T_7 - T_8)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 1{,}5}] + (T_8 - T_9)\,\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa 0{,}5}] + T_9$

Dies führt mit $t = j\Delta t$ und $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ zur Rekursionsformel:

$$T(z,t_k) = \sum_{j=7}^{k} (T_{j-1} - T_j)\,\mathrm{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(t_k - (j-0{,}5)\Delta t)}}\right] + T_k \qquad [100]$$

Die gemessenen Oberflächentemperaturen sind indiziert. Im allgemeinen Fall ist an Stelle von $j = 7$ die Zeit des ersten Temperatursprunges, mit dem die Summation beginnen soll, einzusetzen. Die mit Gleichung [100] erhaltenen Temperaturwerte werden in Abbildung 55,1 mit den nach Gleichung [99] berechneten genauen Werten verglichen.

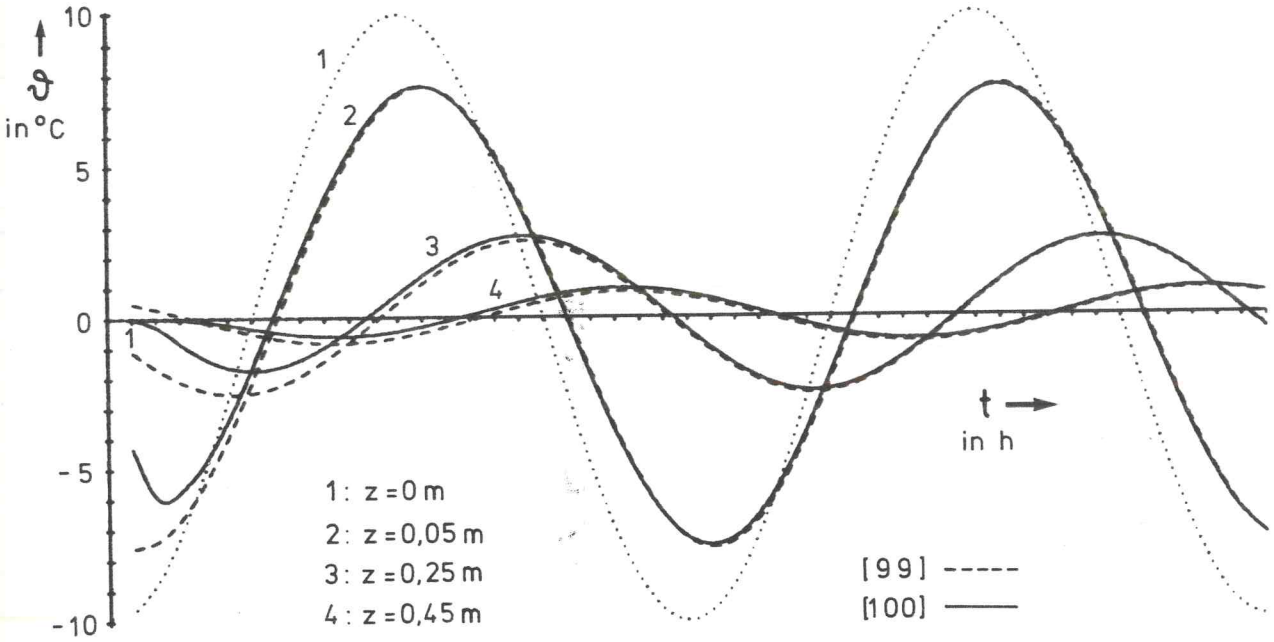


Abb.55,1 : Bodentemperaturen nach Gleichung [100] und nach Gleichung [99] für die exakten Werte

In dieser Abbildung sind zwei Perioden der Oberflächentemperatur (.....) aufgetragen, sowie die für die Tiefen 5, 25 und 45cm nach Gleichung [99] (----) und Gleichung [100] (———) berechneten Bodentemperaturen. In allen Tiefen ist deutlich erkennbar, daß die aus Gleichung [100] erhaltenen Temperaturen sich mit fortschreitender Zeit an die wahren Temperaturen des eingeschwungenen Zustandes anpassen, wobei dieser Prozeß in größeren Tiefen erwartungsgemäß längere Zeit in Anspruch nimmt als in kleineren Tiefen. Mit den in dieser Berechnung verwendeten Bodenkonstanten kann die Angleichung für 5cm Tiefe bereits nach einer halben Periodenlänge als abgeschlossen gelten, wogegen in 45cm Tiefe etwa zwei Periodenlängen für gleichen Abstand beider Kurven benötigt werden. Hier muß allerdings bedacht werden, daß die Anpassung ein Resultat der für beide Berechnungsarten verschiedenen Anfangsbedingungen ist, daß nämlich für Gleichung [100] die Bodentemperaturen in allen Tiefen einheitlich gleich der Mitteltemperatur T_m vorausgesetzt wurden im Gegensatz zu den Temperaturen des eingeschwungenen Zustandes, die bereits früher in Abbildung 52,1 dargestellt wurden und Anfangsbedingung für Gleichung [99] sind. Weiterhin gibt Gleichung [100] die Phasenverschiebung zwischen Oberflächen- und Tiefentemperaturen richtig wieder, so daß sich diese neue Berechnungsart als geeignet zur Ermittlung der Temperaturen eines zunächst halbunendlich ausgedehnten Bodens mit ebener Oberfläche erweist. Wegen ihrer Flexibilität für variable Schwingungsformen der Oberflächentemperatur werden alle weiteren Berechnungen ausschließlich mit dieser Methode erstellt.

Die nächsten drei Abbildungen auf Seite 57 demonstrieren das Verhalten der Bodentemperaturen unter verschiedenen Anfangsbedingungen.

In den Bildern 57,1 bis 57,3 wurde für die Temperatur der Bodenoberfläche der für die Pegelstation berechnete Tagesgang des 19.8.78 zugrunde gelegt und dieser drei mal wiederholt, sodaß vier gleiche Perioden verfügbar waren. Aufgetragen sind die Oberflächentemperatur (.....) und die Bodentemperaturen in den Tiefen 5 cm bis 1 m. In Abbildung 57,1 war die Anfangstemperatur in allen Tiefen mit 0°C vorgegeben worden. In geringen Tiefen paßt sich die Bodentem-

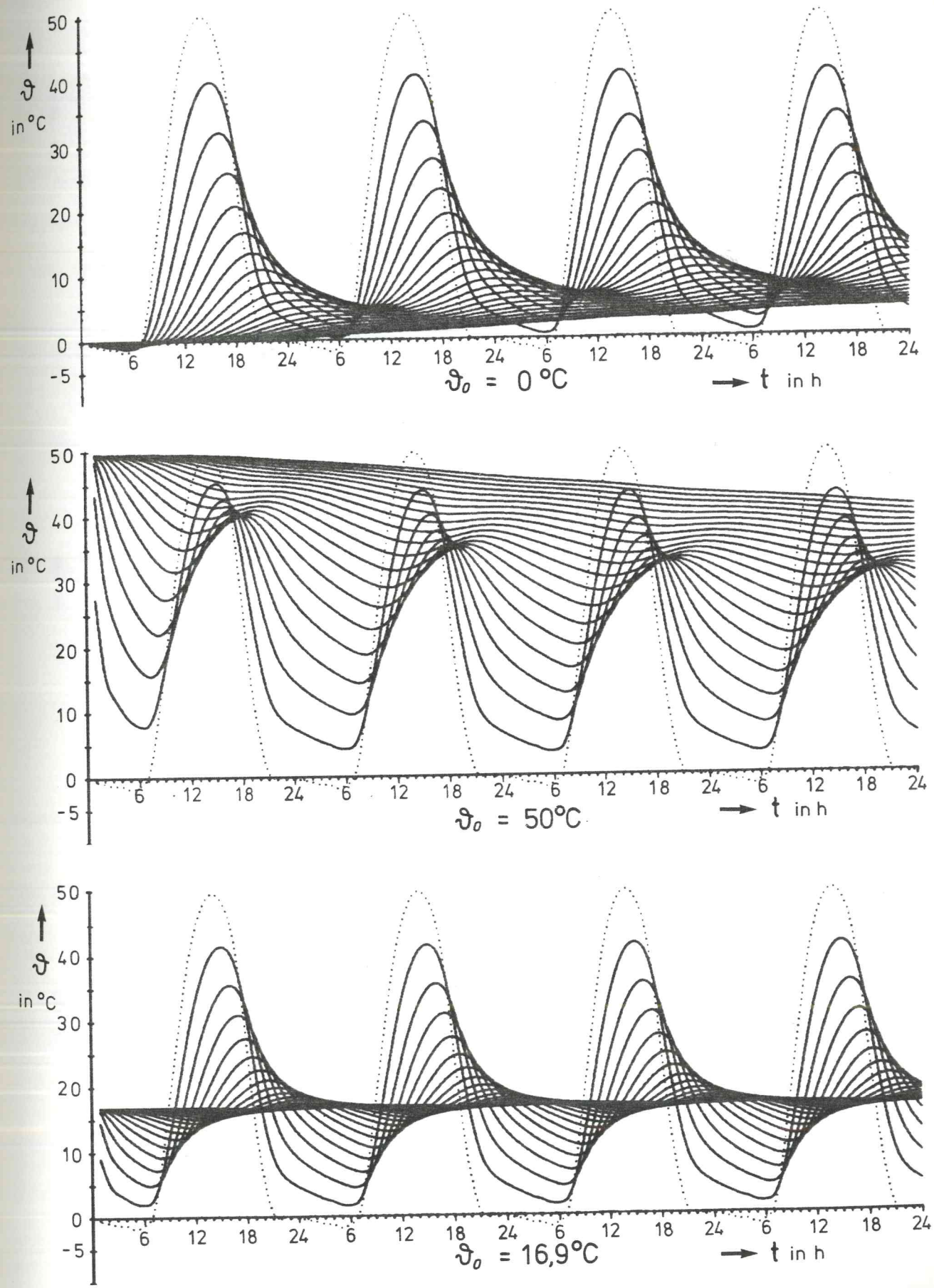


Abb. 57,1–3 : Bodentemperaturen nach Gleichung [100] mit realen Oberflächentemperaturen (.....). Anfangstemp. ϑ_0

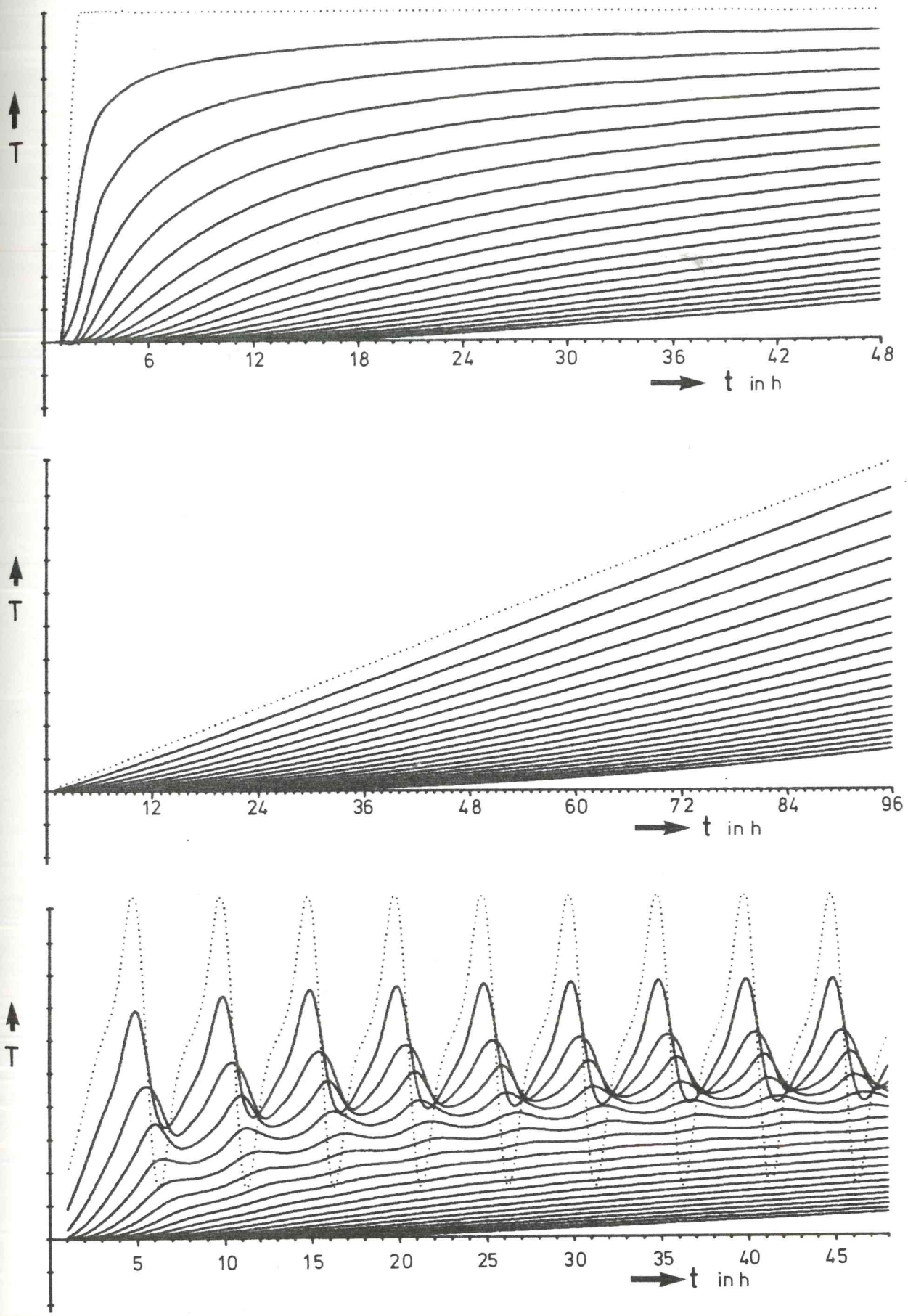


Abb.58,1-3: Bodentemperaturen nach Gleichung [100] bei einem einmaligen Temperatursprung, linearen Anstieg und sägezahnähnlicher Oberflächentemperatur.

peratur der Oberflächentemperatur an und folgt phasenverschoben ihrem Verlauf. Mit zunehmender Tiefe schwächt sich dieses Verhalten aber soweit ab, daß die Temperatur in 1 m Tiefe nach etwa einer Periode Wartezeit beginnt, sich kaum beeinflußt von den Tagestemperaturschwankungen an die Mitteltemperatur anzunähern. Dieselbe Aussage trifft auch auf Abbildung 57,2 zu, nur daß hier die Anfangstemperatur 50°C anstatt 0°C war und sich jetzt die Bodentemperaturen in großen Tiefen verringern. Die in beiden Abbildungen 57,1 und 57,2 merkliche Verzögerungszeit in großen Tiefen hat als Ursache die nur endlich große Temperaturleitfähigkeit des Bodens.

Beginnt man schließlich die Berechnung mit der Mitteltemperatur als Anfangstemperatur, dann zeigt Abbildung 57,3, daß in großen Tiefen kein Einfluß der oberflächennahen Temperaturschwankungen sichtbar ist. Abbildung 58,1 zeigt das Temperaturverhalten des Bodens, wenn als Änderung der Oberflächentemperatur ein einmaliger Temperatursprung vorgegeben wird. Auch in diesem Fall gibt das Verfahren das richtige Ergebnis wieder, ebenso wie bei linearer (Abbildung 58,2) oder sägezahnähnlicher (Abbildung 58,3) Temperaturänderung an der Bodenoberfläche.

Die in den Abbildungen 58,1 bis 58,3 sichtbare Verzögerungszeit der Temperaturreaktionen in großen Tiefen führt auf die Beantwortung der früher aufgeworfenen Frage, für wie lange die Auswirkungen der Oberflächentemperatursprünge in der Rechnung berücksichtigt werden müssen. Offensichtlich haben die großen Tagesvariationen der Oberflächentemperatur ebenso wenig Einfluß auf die Temperatur in großen Tiefen wie die weit zurückliegenden Temperatursprünge an der Oberfläche auf das Verhalten in geringen Tiefen.

Nun steht in Gleichung [100] bei jedem Temperatursprung die Errorfunktion $\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(t_k - j\Delta t + 0{,}5)}}\right)$. In das Argument der Errorfunktion gehen nur die Tiefe z und die Zeit t als Variablen ein. Tabelle 8 zeigt einige Werte der Errorfunktion, wobei nach rechts die Tiefe z in 5cm-Schritten, nach unten die Zeit t in 1h-Schritten zunimmt und für die Temperaturleitfähigkeit des Bodens $\varkappa = 0.00432\ \frac{m^2}{h}$ eingesetzt wurde.

Tab.8: Werte der Errorfunktion mit $\varkappa = 0.00432 \frac{m^2}{h}$

t in h ↓ / Z in m →	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
1	.4094	.7180	.8934	.9686	.9928	.9988	.9998	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
2	.2963	.5632	.7462	.8719	.9428	.9775	.9922	.9977	.9994	.9999	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
3	.2439	.4655	.6485	.7859	.8795	.9376	.9703	.9870	.9948	.9981	.9994	.9998	.9999	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
4	.2120	.4094	.5803	.7180	.8213	.8934	.9403	.9686	.9845	.9928	.9969	.9988	.9995	.9998	.9999	*****	*****	*****	*****	*****
5	.1901	.3696	.5295	.6641	.7710	.8511	.9078	.9457	.9696	.9839	.9919	.9961	.9982	.9992	.9997	.9999	*****	*****	*****	*****
6	.1738	.3395	.4900	.6203	.7278	.8124	.8758	.9211	.9519	.9719	.9843	.9916	.9957	.9979	.9990	.9996	.9998	.9999	*****	*****
7	.1611	.3157	.4581	.5839	.6906	.7775	.8453	.8962	.9327	.9580	.9747	.9853	.9918	.9956	.9977	.9989	.9995	.9997	.9999	*****
8	.1508	.2963	.4317	.5532	.6583	.7462	.8169	.8719	.9130	.9428	.9636	.9775	.9866	.9922	.9957	.9977	.9988	.9994	.9997	.9999
9	.1423	.2801	.4094	.5268	.6300	.7180	.7906	.8486	.8934	.9270	.9514	.9686	.9802	.9879	.9928	.9959	.9977	.9988	.9993	.9997
10	.1351	.2663	.3902	.5038	.6050	.6926	.7662	.8264	.8742	.9111	.9387	.9588	.9730	.9828	.9893	.9935	.9962	.9978	.9988	.9993
11	.1288	.2543	.3734	.4835	.5826	.6695	.7438	.8055	.8556	.8952	.9256	.9484	.9650	.9768	.9850	.9905	.9942	.9965	.9979	.9988
12	.1234	.2439	.3587	.4655	.5625	.6485	.7230	.7859	.8377	.8795	.9124	.9376	.9565	.9703	.9802	.9870	.9917	.9948	.9968	.9981
13	.1186	.2346	.3455	.4493	.5443	.6293	.7037	.7673	.8206	.8643	.8992	.9266	.9476	.9633	.9748	.9830	.9888	.9928	.9954	.9972
14	.1143	.2263	.3337	.4347	.5277	.6116	.6858	.7499	.8043	.8495	.8862	.9155	.9384	.9559	.9690	.9786	.9855	.9903	.9937	.9960
15	.1105	.2188	.3231	.4215	.5126	.5953	.6691	.7335	.7887	.8351	.8734	.9044	.9290	.9482	.9628	.9737	.9818	.9876	.9917	.9945
16	.1070	.2120	.3134	.4094	.4987	.5803	.6535	.7180	.7738	.8213	.8609	.8934	.9196	.9403	.9563	.9686	.9778	.9845	.9894	.9928
17	.1038	.2059	.3045	.3982	.4858	.5662	.6389	.7034	.7597	.8080	.8487	.8825	.9101	.9322	.9496	.9631	.9734	.9811	.9868	.9909
18	.1009	.2002	.2963	.3880	.4739	.5532	.6252	.6896	.7462	.7952	.8369	.8719	.9007	.9241	.9428	.9575	.9689	.9775	.9840	.9888
19	.0982	.1949	.2888	.3784	.4628	.5410	.6123	.6765	.7333	.7828	.8254	.8614	.8913	.9160	.9358	.9517	.9641	.9737	.9810	.9864
20	.0957	.1901	.2818	.3696	.4524	.5295	.6002	.6641	.7210	.7710	.8142	.8511	.8821	.9078	.9288	.9457	.9591	.9696	.9777	.9839
21	.0934	.1856	.2753	.3613	.4427	.5188	.5887	.6523	.7092	.7595	.8034	.8410	.8730	.8997	.9217	.9396	.9540	.9654	.9743	.9811
22	.0913	.1814	.2692	.3536	.4336	.5086	.5779	.6411	.6980	.7486	.7929	.8312	.8640	.8916	.9146	.9335	.9488	.9610	.9707	.9782
23	.0893	.1775	.2635	.3463	.4251	.4990	.5676	.6304	.6872	.7380	.7827	.8217	.8552	.8837	.9075	.9273	.9434	.9565	.9669	.9751
24	.0874	.1738	.2581	.3395	.4170	.4900	.5579	.6203	.6770	.7278	.7729	.8124	.8465	.8758	.9004	.9211	.9380	.9519	.9630	.9719
25	.0857	.1704	.2531	.3330	.4094	.4814	.5486	.6106	.6671	.7180	.7634	.8033	.8381	.8680	.8934	.9148	.9326	.9472	.9591	.9686
26	.0840	.1671	.2484	.3270	.4021	.4732	.5398	.6013	.6576	.7085	.7541	.7945	.8298	.8603	.8864	.9086	.9271	.9424	.9550	.9651
27	.0825	.1640	.2439	.3212	.3953	.4655	.5313	.5924	.6485	.6994	.7452	.7859	.8216	.8527	.8795	.9023	.9216	.9376	.9508	.9616
28	.0810	.1611	.2396	.3157	.3887	.4581	.5233	.5839	.6398	.6906	.7365	.7775	.8137	.8453	.8727	.8962	.9160	.9327	.9466	.9580
29	.0796	.1583	.2356	.3105	.3825	.4510	.5156	.5758	.6313	.6821	.7281	.7693	.8059	.8380	.8660	.8900	.9105	.9278	.9423	.9543
30	.0782	.1557	.2317	.3056	.3766	.4443	.5082	.5679	.6232	.6739	.7200	.7614	.7983	.8308	.8593	.8839	.9050	.9229	.9380	.9505
31	.0770	.1532	.2281	.3008	.3709	.4379	.5011	.5604	.6154	.6660	.7121	.7537	.7909	.8238	.8527	.8778	.8995	.9180	.9336	.9467
32	.0758	.1508	.2246	.2963	.3655	.4317	.4944	.5532	.6079	.6583	.7044	.7462	.7836	.8169	.8462	.8719	.8940	.9130	.9292	.9428
33	.0746	.1486	.2212	.2920	.3604	.4258	.4878	.5462	.6006	.6509	.6970	.7388	.7765	.8101	.8399	.8659	.8886	.9081	.9248	.9389
34	.0735	.1464	.2180	.2879	.3554	.4201	.4816	.5395	.5936	.6437	.6898	.7317	.7696	.8035	.8336	.8601	.8832	.9032	.9204	.9350
35	.0724	.1443	.2150	.2839	.3506	.4146	.4755	.5330	.5868	.6368	.6828	.7248	.7628	.7970	.8274	.8543	.8778	.8983	.9159	.9310
36	.0714	.1423	.2120	.2801	.3460	.4094	.4697	.5268	.5803	.6300	.6760	.7180	.7562	.7906	.8213	.8486	.8725	.8934	.9115	.9270
37	.0705	.1404	.2092	.2765	.3416	.4043	.4641	.5207	.5739	.6235	.6693	.7114	.7497	.7843	.8153	.8429	.8673	.8886	.9071	.9230
38	.0695	.1385	.2065	.2729	.3374	.3994	.4587	.5149	.5678	.6171	.6629	.7050	.7434	.7782	.8094	.8373	.8620	.8837	.9027	.9191
39	.0686	.1368	.2039	.2696	.3333	.3947	.4535	.5092	.5618	.6110	.6566	.6987	.7372	.7721	.8037	.8318	.8569	.8790	.8983	.9151
40	.0678	.1351	.2014	.2663	.3294	.3902	.4484	.5038	.5560	.6050	.6505	.6926	.7311	.7662	.7980	.8264	.8518	.8742	.8939	.9111
41	.0670	.1334	.1990	.2632	.3255	.3858	.4435	.4985	.5504	.5991	.6446	.6866	.7252	.7605	.7924	.8211	.8467	.8695	.8895	.9071
42	.0662	.1318	.1966	.2601	.3219	.3815	.4388	.4933	.5449	.5935	.6388	.6808	.7194	.7548	.7869	.8158	.8418	.8648	.8852	.9031
43	.0654	.1303	.1944	.2572	.3183	.3774	.4342	.4883	.5397	.5880	.6331	.6751	.7138	.7492	.7815	.8106	.8368	.8602	.8809	.8991
44	.0646	.1288	.1922	.2543	.3149	.3734	.4297	.4835	.5345	.5826	.6276	.6695	.7082	.7438	.7762	.8055	.8320	.8556	.8766	.8952
45	.0639	.1274	.1901	.2516	.3115	.3696	.4254	.4788	.5295	.5774	.6223	.6641	.7028	.7384	.7710	.8005	.8272	.8511	.8724	.8912
46	.0632	.1260	.1881	.2489	.3083	.3658	.4212	.4742	.5246	.5723	.6170	.6588	.6975	.7332	.7658	.7956	.8224	.8466	.8682	.8873
47	.0625	.1247	.1861	.2464	.3052	.3622	.4172	.4698	.5199	.5673	.6119	.6536	.6923	.7280	.7608	.7907	.8178	.8421	.8640	.8834
48	.0619	.1234	.1842	.2439	.3021	.3587	.4132	.4655	.5153	.5625	.6069	.6485	.6872	.7230	.7558	.7859	.8131	.8377	.8598	.8795
49	.0613	.1221	.1823	.2414	.2992	.3553	.4094	.4613	.5108	.5578	.6021	.6435	.6822	.7180	.7510	.7811	.8086	.8334	.8557	.8757
50	.0606	.1209	.1805	.2391	.2963	.3519	.4056	.4572	.5064	.5532	.5973	.6387	.6773	.7131	.7462	.7765	.8041	.8291	.8516	.8719
51	.0600	.1197	.1788	.2368	.2935	.3487	.4020	.4532	.5022	.5487	.5926	.6339	.6725	.7084	.7415	.7719	.7996	.8248	.8476	.8681
52	.0595	.1186	.1771	.2346	.2908	.3455	.3984	.4493	.4980	.5443	.5881	.6293	.6678	.7037	.7368	.7673	.7952	.8206	.8436	.8643
53	.0589	.1175	.1754	.2324	.2882	.3425	.3950	.4456	.4939	.5400	.5837	.6247	.6632	.6991	.7323	.7629	.7909	.8165	.8396	.8605
54	.0584	.1164	.1738	.2303	.2856	.3395	.3916	.4419	.4900	.5358	.5793	.6203	.6587	.6945	.7278	.7585	.7867	.8124	.8357	.8568
55	.0578	.1153	.1723	.2283	.2831	.3366	.3884	.4383	.4861	.5317	.5750	.6159	.6543	.6901	.7234	.7542	.7824	.8083	.8318	.8531
56	.0573	.1143	.1707	.2263	.2807	.3337	.3852	.4347	.4823	.5277	.5709	.6116	.6499	.6858	.7191	.7499	.7783	.8043	.8280	.8496
57	.0568	.1133	.1693	.2244	.2783	.3310	.3820	.4313	.4786	.5238	.5668	.6074	.6457	.6815	.7148	.7457	.7742	.8003	.8242	.8458
58	.0563	.1123	.1678	.2225	.2760	.3283	.3790	.4280	.4750	.5200	.5628	.6033	.6415	.6773	.7106	.7416	.7701	.7964	.8204	.8422
59	.0558	.1114	.1664	.2206	.2738	.3256	.3760	.4247	.4715	.5163	.5589	.5993	.6374	.6731	.7065	.7375	.7662	.7925	.8167	.8387
60	.0554	.1105	.1650	.2188	.2716	.3231	.3731	.4215	.4680	.5126	.5551	.5953	.6334	.6691	.7024	.7335	.7622	.7887	.8130	.8351

Betrachtet man zur Tabelle 8 die für einige Zeitschritte ausgeschriebene Rekursionsformel [100]:

$$T(z,10) = (T_0 - T_1)E_{10}^z + (T_1 - T_2)E_9^z + (T_2 - T_3)E_8^z + \cdots$$
$$\cdots + (T_8 - T_9)E_2^z + (T_9 - T_{10})E_1^z + T_{10}$$

mit der Abkürzung E_t^z für $\mathrm{erf}[z/\sqrt{4\varkappa(t-0{,}5)}]$,

dann ergeben sich diese Schlußfolgerungen:

Für kleine Tiefen z und lange Zeiten t hat die Errorfunktion relativ kleine Werte nahe Null und es kann ein Grenzwert δ_1 gewählt werden derart, daß für Errorfunktionswerte kleiner als δ_1 die Funktion auf Null gesetzt wird und deshalb der zugehörige Temperatursprung wegfällt.

kleine Tiefen, lange Zeiten:

$$E_{10}^z \approx E_9^z \approx \cdots \approx E_5^z \approx 0 \quad , \text{wenn } E_4^z > \delta_1$$

$$\longrightarrow T(z,10) \approx (T_6 - T_7)E_4^z + (T_7 - T_8)E_3^z + (T_8 - T_9)E_2^z + (T_9 - T_{10})E_1^z + T_{10} .$$

Die Bodentemperatur in oberflächennahen Schichten wird mit dieser Näherung nur von kurz zurückliegenden Temperatursprüngen bestimmt.

Analog nimmt die Errorfunktion für große Tiefen und kurze Zeiten Werte nahe 1 an, so daß wiederum ein Grenzwert δ_2 gewählt werden kann derart, daß alle Errorfunktionswerte größer als δ_2 gleich 1 gesetzt werden.

große Tiefen, kurze Zeiten:

$$E_1^z \approx E_2^z \approx \cdots \approx E_6^z \approx 1 \quad , \text{wenn } E_7^z < \delta_2$$

$$\longrightarrow T(z,10) \approx (T_0 - T_1)E_{10}^z + (T_1 - T_2)E_9^z + (T_2 - T_3)E_8^z + (T_3 - T_4)E_7^z + T_4 .$$

Die Bodentemperatur in tiefen Schichten wird mit dieser Näherung von kurz zurückliegenden Temperatursprüngen nicht geändert. So kann je nach gewünschter Genauigkeit für die betrachtete Tiefenschicht entschieden werden, wie lange die einzelnen Temperaturdifferenzen in die Summation eingehen müssen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird jedoch von dieser Einschränkungsmöglichkeit kein Gebrauch gemacht und es werden bis zu 10 Tage zurückliegende Temperaturdifferenzen verwendet, wenn damit eine signifikante Genauigkeitssteigerung der Rechenergebnisse erzielt werden kann.

Bisher wurden mit Gleichung [100] nur die Temperaturen $T(z,t)$ berechnet. Der Übergang zum senkrecht fließenden Bodenwärmestrom $q(z,t)$ gelingt aber auch hier sehr leicht. Wegen

$$q(z,t) = -\lambda_B \, dT(z,t)/dz$$

und

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\, e^{-z^2/(4\varkappa t)}$$

ergibt sich für den vertikalen Bodenwärmestrom

$$q(z,t) = -\lambda_B \sum_{j=n}^{k} (T_{j-1} - T_j)\, \frac{e^{-z^2/[4\varkappa(t_k - j\Delta t + 0{,}5)]}}{\sqrt{\pi\varkappa(t_k - j\Delta t + 0{,}5)}} \quad . \qquad [101]$$

Hier ist t_n wieder der Zeitpunkt des ersten Temperatursprunges.

Ist die Schwankung der Oberflächentemperatur genau cosinusförmig, dann gibt Gleichung [94] den exakten Wert des Bodenwärmestroms in der Tiefe z und zur Zeit t im eingeschwungenen Zustand an:

$$q(z,t) = -\lambda_B \frac{dT(z,t)}{dz} =$$

$$= \lambda_B T_m \sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}}\, \exp\left\{-z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}}\right\} \left[\sin\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\} - \cos\left\{z\sqrt{\frac{\pi}{\varkappa t_{per}}} - 2\pi\frac{t}{t_{per}}\right\}\right].$$

An dieser Gleichung wird wieder unter den früher getroffenen Voraussetzungen (eingeschwungener Zustand, halbunendlich ausgedehnter, homogener Körper mit ebener Oberfläche) die Methode der Errorfunktion gemessen. In Abbildung 63,1 schwingt die Oberflächentemperatur mit einer Amplitude von 10 Kelvin um den Mittelwert 0°C. Für 5, 25 und 45cm Tiefe sind die nach beiden Verfahren, also nach Gleichung [94] (-----) und Gleichung [101] (———) berechneten Bodenwärmeströme aufgetragen. Die Kurven verdeutlichen die relativ schnelle Anpassung der Werte nach Gleichung [101] an die exakten Werte. Während in Abbildung 55,1 die Temperatur in 25cm Tiefe noch 1,5 Perioden zur guten Anpassung benötigte, gleicht sich der Bodenwärmestrom in derselben Tiefe schon nach einer halben Periode an. Aber auch hier dauert die

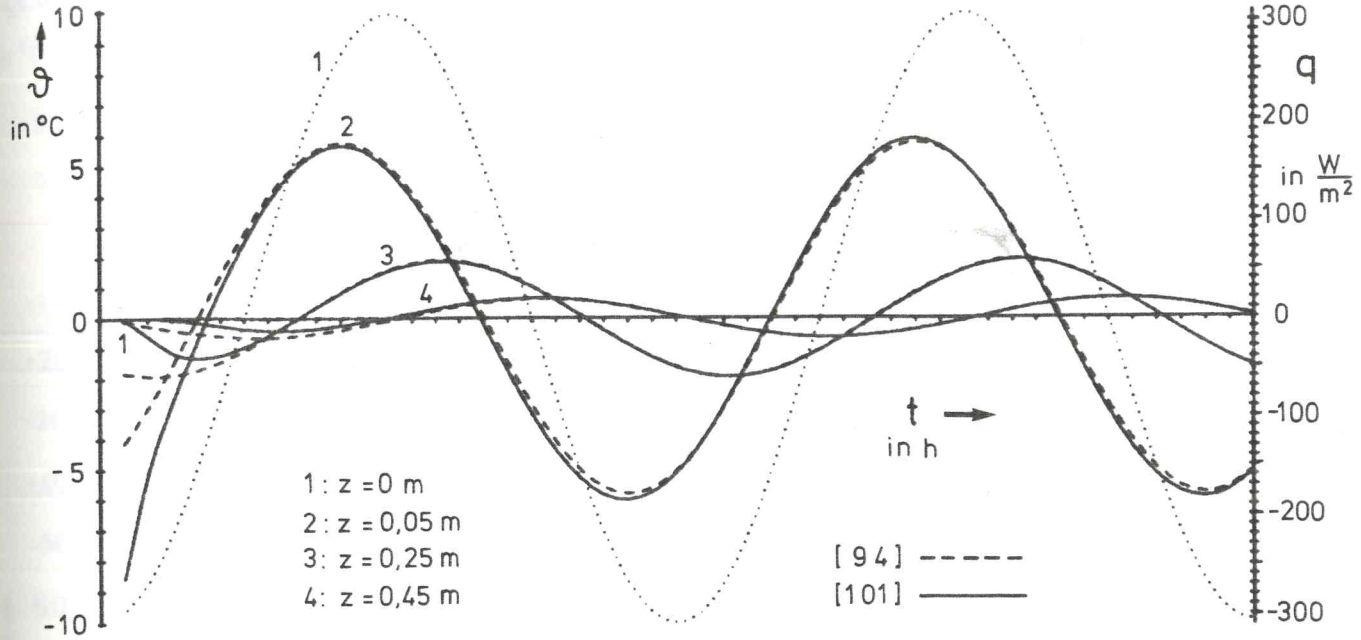
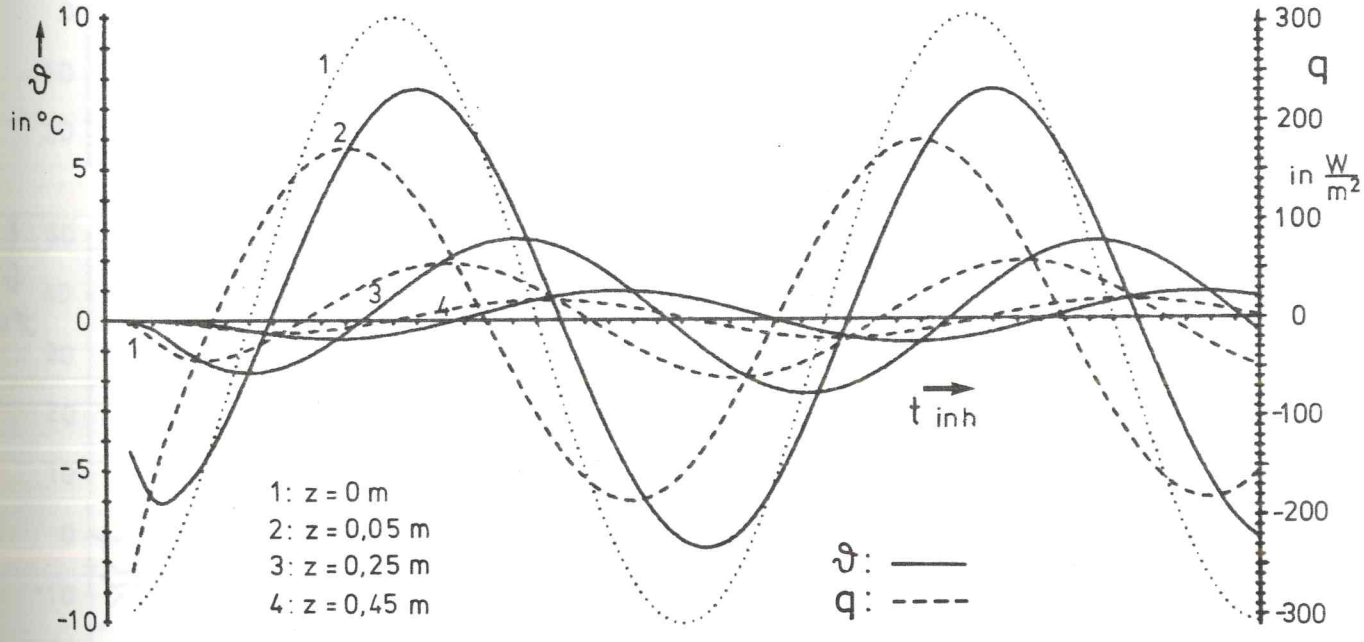


Abb.63,1: Bodenwärmestrom bei cos-förmiger Oberflächentemperatur



Abb,63,2: Bodenwärmestrom (-----) und Bodentemp. (———)
bei cos-förmiger Oberflächentemperatur (.....)

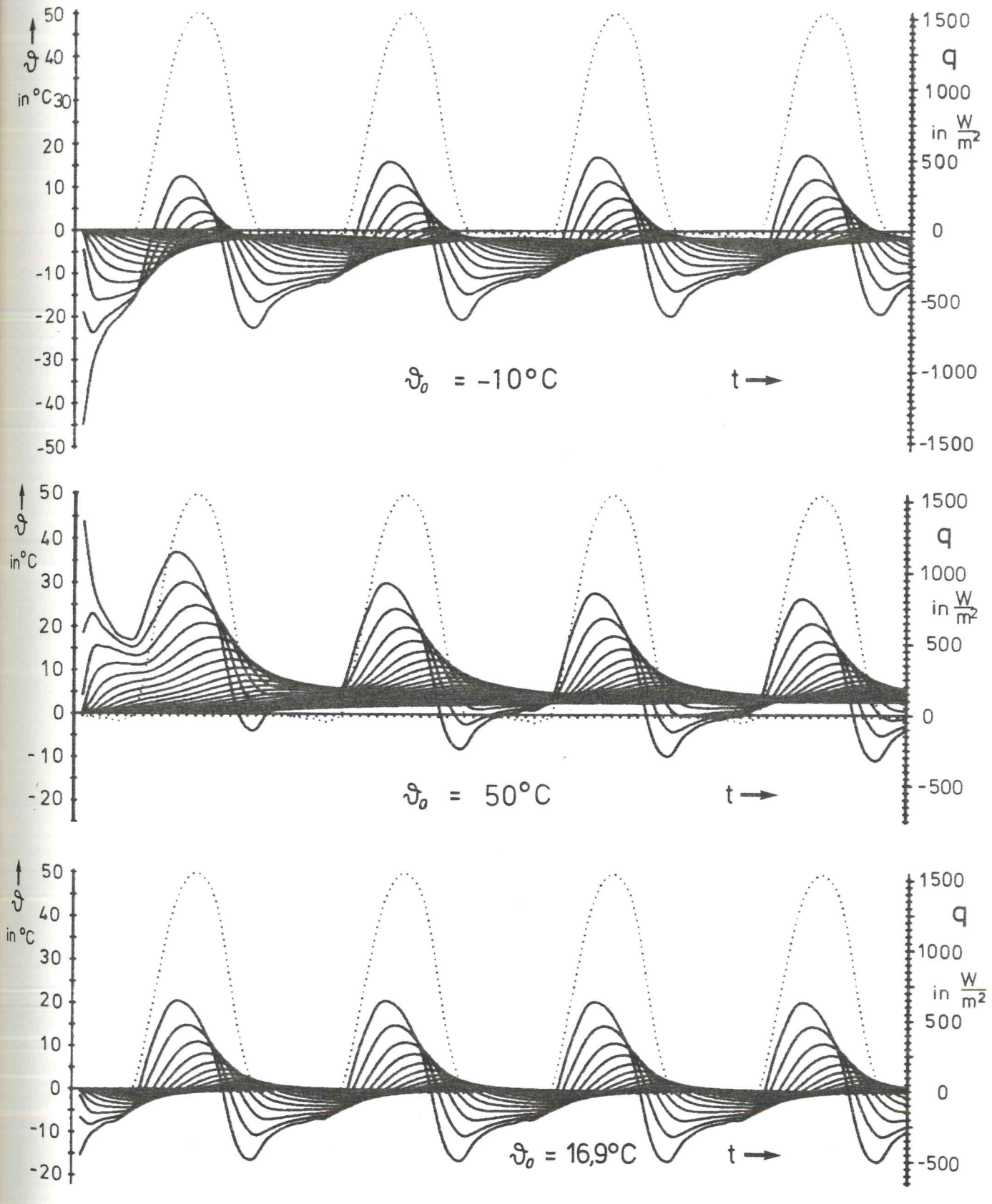


Abb.64,1-3: Bodenwärmestrom nach Gleichung [101] mit realen Oberflächentemperaturen. Anfangstemperatur ϑ_0

Anpassung mit zunehmender Tiefe länger.

In Abbildung 63,2 sind die zur gleichen Oberflächentemperatur gehörenden und nach den Gleichungen [100] und [101] berechneten Bodentemperaturen und Wärmeströme in gleichen Tiefen aufgetragen. Es ist deutlich die Phasenverschiebung um $\pi/4$ = 3h zwischen Temperatur und Wärmestrom zu erkennen.

Auch zwischen dem Maximum der gemessenen Wassertemperatur an der Pegelstation und dem Maximum der Globalstrahlung am 19.8.78 gibt es eine Phasenverschiebung von 1 Stunde, wie aus den Abbildungen 41,1 und 41,2 entnommen werden kann. Für diese Verschiebung verantwortlich ist aber neben der reinen Wärmeleitung durch den Boden auch die Überflutung der ufernahen, erhitzten Bodenoberfläche während erhöhter Durchflußmenge der Bäche mit gleichzeitiger Auszehrung des gespeicherten Wärmeinhaltes dieses Bereiches.

Die drei Abbildungen 64,1 bis 64,3 zeigen das Verhalten des Bodenwärmestroms, wenn als Oberflächentemperatur der berechnete Tagesgang des 19.8.78 herangezogen wird. In Abbildung 64,1 nimmt der oberflächennahe Bodenwärmestrom anfangs sehr hohe negative Werte an (gemäß der Konvention, daß von einer Fläche weg fließende Wärmeströme als negativ, zur Fläche hin fließende als positiv zu zählen sind), weil der Temperatursprung von der Ausgangstemperatur -10°C auf etwa 0°C an der Oberfläche nach dem ersten Zeitschritt relativ groß ist. Beträgt die Anfangstemperatur wie in Abbildung 64,2 +50°C, dann trifft dieselbe Aussage zu, aber diesmal mit umgekehrten Vorzeichen. Ist schließlich wie in Abbildung 64,3 die Ausgangstemperatur gleich der Mitteltemperatur 16.9°C, dann gibt es in tieferen Schichten keinen beständigen vertikalen Bodenwärmestrom mehr wie in den beiden vorhergehenden Abbildungen. In diesem Fall findet nur eine periodische Wärmezufuhr und -entnahme durch die Bodenoberfläche in den oberen Schichten statt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Berechnungsmethode mit der Errorfunktion es gestattet, neben den Bodentemperaturen in allen Tiefen ebenso leicht auch den vertikalen Bodenwärmestrom für beliebige Formen der Oberflächentemperaturschwankung zu ermitteln. Dies gelingt beim halbunendlich ausgedehnten homogenen Körper nicht

nur für eine ebene Oberfläche, Abbildung 66,1 und 66,2, sondern auch, wenn die Oberfläche einen Knick aufweist, Abbildung 66,3 und 66,4.

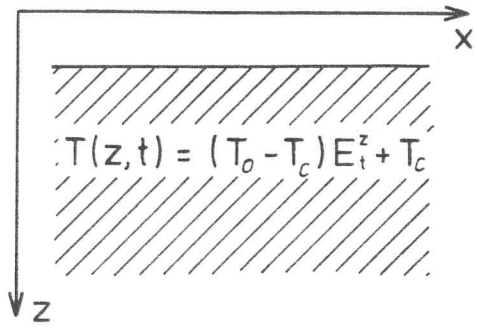


Abb. 66,1

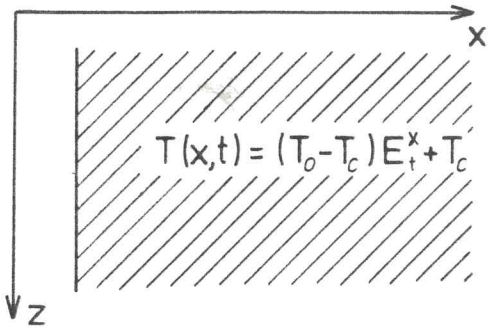


Abb. 66,2

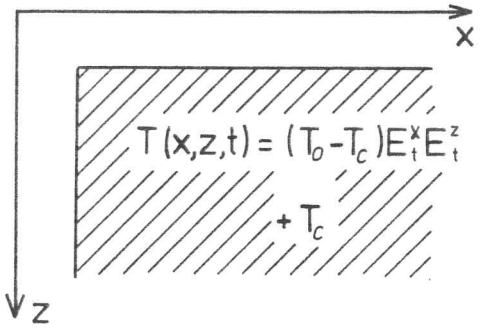


Abb. 66,3

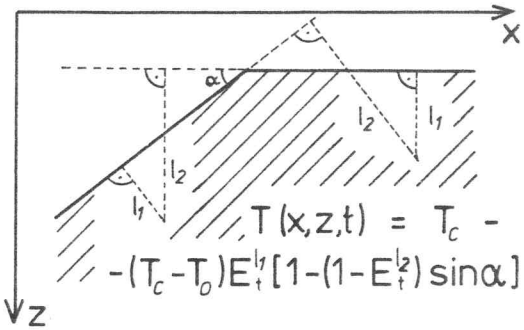


Abb. 66,4

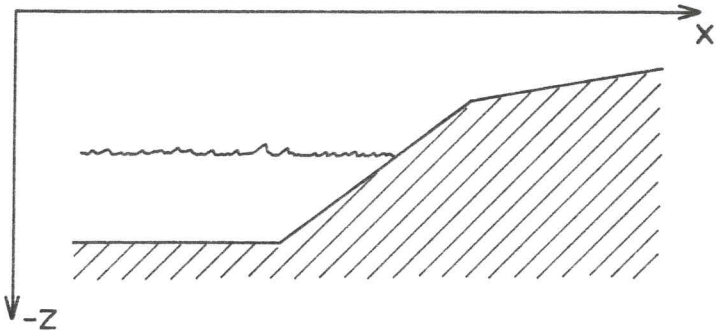


Abb. 66,5

Abb.66,1-5: Temperaturen eines vorher thermisch ausgeglichenen Körpers nach einem Temperatursprung an der Oberfläche

Auch endlich ausgedehnte Körper können mit Einschränkungen nach dieser Methode behandelt werden. Jedoch war bisher immer vorausgesetzt worden, daß die gesamte Oberfläche des Körpers überall und gleichzeitig auf die gleiche Temperatur gebracht wurde. Ein Schnitt durch das Bachprofil in Abbildung 66,5 zeigt aber, daß diese Bedingung hier nicht mehr erfüllt ist. Stattdessen gilt jetzt, daß der Oberflächenbereich außerhalb des Wassers einem Temperaturtagesgang unterworfen ist, der durch die Energiebilanz der Bodenoberfläche bestimmt wird, während der vom Wasser benetzte Bereich die Wassertemperatur annimmt. Für diese Bedingungen muß der durch die gesamte Grenzfläche Wasser-Boden fließende Bodenwärmestrom mit einer erweiterten Methode der Errorfunktion bestimmt werden. Da die Uferneigungswinkel in die Berechnung mit eingehen sollen, wird zunächst das gewinkelte Bachbettprofil mit geeigneten Mitteln in die vertraute ebene Oberfläche transformiert. Dies leistet die konforme Abbildung des Bachbettprofils, speziell der Satz von Schwarz-Christoffel.

6.2.3 Konforme Abbildung des Bachbettprofils

Wenn ein halbunendlich ausgedehnter Körper eine ebene Oberfläche hat, ist es relativ einfach, den Bodenwärmestrom zu berechnen, der zwischen einem Streifen der Fläche und dem Rest der Fläche fließt, wenn dieser Rest einem beliebigen Temperaturgang ausgesetzt ist. Dieses Vorhaben bereitet bei gewinkelten Oberflächen größere Schwierigkeiten. Durch die Abbildung soll eine transformierte, ebene Breite der Bachsohle gefunden werden, durch die ein gleich großer Bodenwärmestrom fließt wie durch die reale Grenzfläche Wasser-Boden im gewinkelten Urbereich. Die Bedingung der ebenen Oberfläche verlangt das Verschwinden der Uferneigungswinkel. Nun stellt das reale Bachbettprofil mit dem in die Tiefe halbunendlich ausgedehnten Boden im Riemannschen Sinne die Berandung eines schlichten[1]), einfach zusammenhängenden Gebietes dar, wenn der unendlich ferne Rand in einem endlichen Punkt zusammengefaßt wird. Dies wird über die Zwischenabbildung auf die Riemannsche Zahlenkugel verifiziert. Der Riemannsche Abbildungssatz der konformen Abbildung sagt dann aus, daß schlichte oder schlichtartige, einfach zusammenhängende Gebiete stets eindeutig umkehrbar aufeinander abgebildet werden können. Das Urgebiet mit winkliger Berandung wird auf ein Bildgebiet mit im interessierenden Bereich gerader Berandung abgebildet, hier die Lösung des Problems berechnet und diese dann vom Urgebiet übernommen. Es muß aber nicht notwendigerweise der umrandete Boden das ursprüngliche Gebiet sein. Genauso gut kann die Restfläche, die umrandete Luft- und Wasserfläche als Urbild herangezogen werden, wobei Fläche in diesem Zusammenhang „komplexe Teilebene" bedeutet und nicht reale Boden- oder Wasseroberfläche.

[1]): Definitionen: Schlicht: kein Teil eines dreidimensionalen Gebietes überragt einen anderen Teil desselben Gebietes.
Schlichtartig: sich überragende Teile können in nebeneinanderliegende Gebiete transformiert werden.
Einfach zusammenhängend: keine Löcher enthaltend

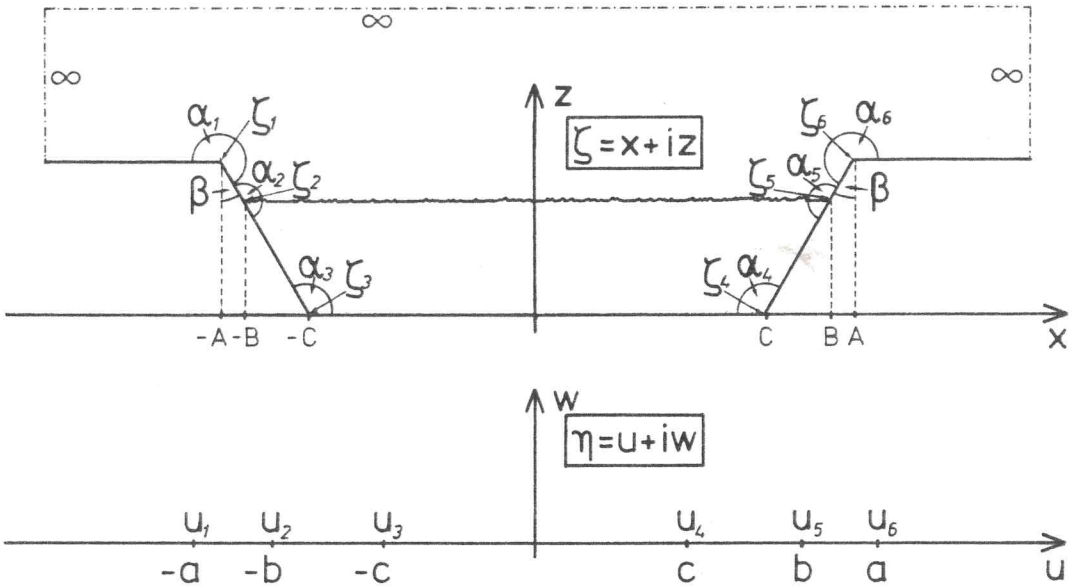


Abb.69,1 : Transformation des Bachbettprofils von der ζ-Ebene in die η-Ebene

Das reale Bachbettprofil liegt nach Abbildung 69,1 in der komplexen ζ-Ebene und wird durch die reellen Komponenten der Eckpunkte ζ_i und ihre Winkel α_i bestimmt. Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit werden zur Vereinfachung der Rechnung die Geraden jenseits der äußeren Eckpunkte parallel zur Bachsohle gesetzt. Dann lassen sich die Eckenwinkel α_i als Funktion des Böschungswinkels β angeben:

$$\alpha_1 = \alpha_6 = \frac{3\pi}{2} - \beta \quad ; \quad \alpha_2 = \alpha_5 = \pi \quad ; \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi}{2} + \beta \; .$$

Die Winkel α_i sind innenliegend im einfach zusammenhängenden Gebiet, welches vom Polygonzug des Bettprofils und der strichpunktierten Linie umrandet wird.

Der Schwarz-Christoffel'sche Abbildungssatz für Innenwinkel lautet jetzt im allgemeinen:

Es sei auf der reellen Achse der komplexen η-Ebene die Menge der reellen Zahlen

$$u_1, u_2, \ldots u_n; \; u_1 < u_2 < \cdots < u_n$$

gegeben. Dann bildet die Transformation

$$\zeta = A \int_{c_0}^{\eta} (\eta - u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\eta - u_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \ldots (\eta - u_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\eta + B \qquad [102]$$

den oberen Teil ($\mathrm{Im}(\eta) > 0$) der η-Ebene auf den polygonalen Bereich der ζ-Ebene ab.

Den Punkten u_i auf der reellen Achse der η-Ebene, die in einem bestimmten Sinn durchlaufen werden, entsprechen die im gleichen Sinn zu durchlaufenden Punkte ζ_i der ζ-Ebene. Ur- und Bildgebiet mit zugehörigem Feld der Strom- und Potential(=Temperatur-)linien liegen dann in Laufrichtung auf derselben Seite des Weges. A und B sind komplexe Konstanten, die eine Drehstreckung und Translation des polygonalen Bereichs der ζ-Ebene bewirken. Der Integrationsweg von c_0 nach η ist beliebig. Punkte ζ_i des Polygonzuges, die im Unendlichen liegen, werden in der Abbildungsformel explizit nicht berücksichtigt.

Wie bei jeder konformen Abbildung schlichter und einfach zusammenhängender Gebiete lassen sich auch hier 3 Transformationsbedingungen willkürlich wählen. Es soll u_3 und u_4 auf $\pm c$ festgelegt werden und $|u_1| = |u_6|$ sein. Die Lage aller Punkte u_i auf der reellen η-Achse ist dann eindeutig bestimmt. Für das gegenwärtige Problem lautet die Schwarz-Christoffel-Formel, wenn die Punkte $\pm c$ auf ± 1 normiert werden und die Integration bei $c_0 = 0$ beginnt:

$$\zeta = A \int_{c_0}^{\eta} (\eta + a)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}} (\eta + b)^{0} (\eta + c)^{\frac{\beta}{\pi} - \frac{1}{2}} (\eta - c)^{\frac{\beta}{\pi} - \frac{1}{2}} (\eta - b)^{0} (\eta - a)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}} d\eta + B$$

$$= A \int_{0}^{\eta} \left(\frac{\eta^2 - a^2}{\eta^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\pi}} d\eta + B . \qquad [103]$$

Dieses Integral ist für beliebige Winkel β, $0<\beta<\pi/2$ nicht geschlossen lösbar. Im Fall, daß das Bachbett sehr flach ist und β Werte nahe $\pi/2$ annimmt, bewirkt die Abbildung fast keine Veränderung der Streckenverhältnisse: $\zeta \approx \eta$ mit $\mathbb{A} = 1$, $\mathbb{B} = 0$. Die reale Breite der benetzten Bachbettsohle stimmt nahezu überein mit der gesuchten transformierten, ebenen Breite. Das andere Extrem, der Rechteckkanal mit $\beta = 0$ erzeugt die Gleichung

$$\zeta = \mathbb{A}\int_0^{\eta}\sqrt{\frac{\eta^2-a^2}{\eta^2-1}}\,d\eta + \mathbb{B} \quad ; \quad \mathbb{B} = 0 \,, \qquad [104]$$

die auf elliptische Integrale 1. und 2.Gattung zurückgeführt werden kann.

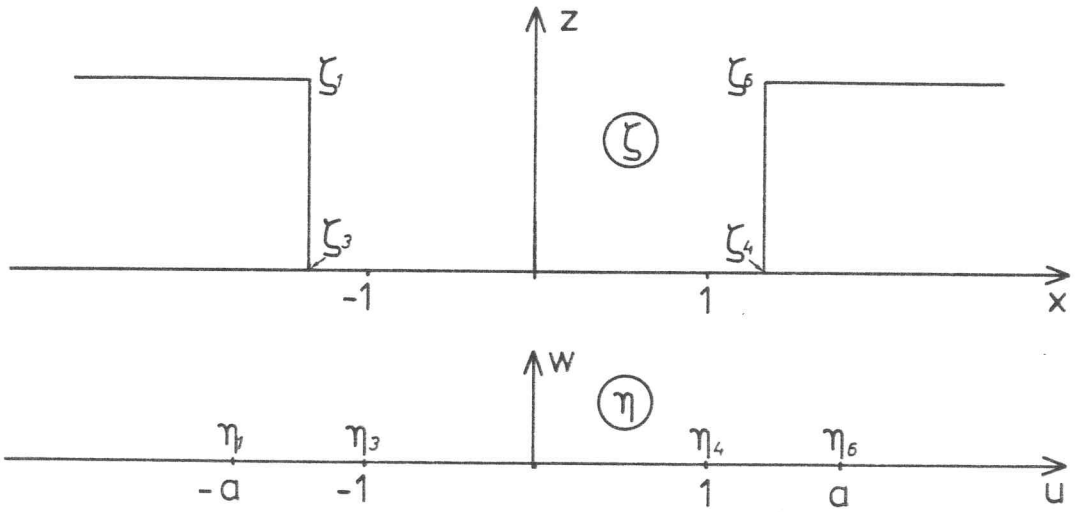


Abb.71,1 : Konforme Abbildung eines Rechteckkanals auf die reelle Achse der η -Ebene

Dazu müssen die Punkte ζ_3, ζ_4 auf $\pm\eta = \pm 1$ normiert werden und ζ_1, ζ_6 sollen in $\pm a = \pm 1/k$, $k < 1$ übergehen, wie in Abbildung 71,1 gezeigt wird. Daraus folgt

$$\zeta = \mathbb{A}\int_0^{\eta}\left(\frac{\eta^2-1/k^2}{\eta^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad ; \quad k = \sin\alpha_k \,. \qquad [105]$$

Wird der Ähnlichkeitsfaktor A ebenfalls gleich k gesetzt, folgt daraus

$$\zeta = \int_0^{\eta} \left(\frac{k^2\eta^2 - 1}{\eta^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta = \int_0^{\eta} \left(\frac{1 - k^2\eta^2}{1 - \eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad . \qquad [106]$$

Die Substitutionen

$$\eta = \sin\varphi \; ; \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \eta^2}$$

$$d\eta = \cos\varphi \; d\varphi = \sqrt{1 - \eta^2} \; d\varphi$$

führen das Integral

$$\zeta = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \cos\varphi \; d\varphi \qquad [107]$$

auf die Legendresche Normalform

$$\zeta = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \; d\varphi = E(k,\varphi) \qquad [108]$$

zurück. Dieses elliptische Integral 2.Gattung gestattet die punktweise tabellarische Berechnung von $\zeta, 0 < \zeta < \zeta_4$, also von Punkten des Kanalbodens, wobei die Bewegung von $\eta, 0 < \eta < 1$, auf eine Änderung von $\varphi, 0 < \varphi < \pi/2$, übertragen wird. Wegen $\eta = \sin\varphi \leq 1$ müssen aber Streckenabschnitte mit $\eta > 1$ durch eine erneute Abbildung in eine $\tilde{\eta}$-Ebene auf den Bereich $\tilde{\eta}, 0 < \tilde{\eta} < 1$ transformiert werden. Durch die Substitution

$$k^2\eta^2 = 1 - k'^2\tilde{\eta}^2 \qquad [109]$$

wird etwa das Intervall $\eta = 1$ bis $\eta = a = 1/k$ auf $\tilde{\eta} = 1$ bis $\tilde{\eta} = 0$ abgebildet. Es sei

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos\alpha_k$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{k^2} - \left[\frac{k'}{k}\right]^2 \tilde{\eta}^2} \; ; \quad \tilde{\eta} = \sqrt{\frac{1 - k^2\eta^2}{1 - k^2}}$$

$$d\eta = - \frac{k'^2\tilde{\eta}}{k\sqrt{1 - k'^2\tilde{\eta}^2}} \, d\tilde{\eta} \quad .$$

Dann wird

$$\zeta = \int_1^{\eta} \frac{\sqrt{1-k^2\eta^2}}{\sqrt{1-\eta^2}}\, d\eta = -\int_1^{\tilde{\eta}} \frac{\sqrt{1-1+k'^2\tilde{\eta}^2}}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{-k'^2\tilde{\eta}}{k\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}}\, d\tilde{\eta} =$$

$$= \int_1^{\tilde{\eta}} \frac{k'^3\tilde{\eta}^2}{\sqrt{k^2-k^2\eta^2}\,\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}}\, d\tilde{\eta} \,. \qquad [110]$$

Wegen $k^2 - k^2\eta^2 = k^2 - 1 + 1 - k^2\eta^2 = -k'^2 + k'^2\tilde{\eta}^2 = -k'^2(1-\tilde{\eta}^2)$ folgt

$$\zeta = \int_1^{\tilde{\eta}} \frac{k'^3\tilde{\eta}^2}{\sqrt{-k'^2(1-\tilde{\eta}^2)}} \frac{d\tilde{\eta}}{\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}} = -i\int_1^{\tilde{\eta}} \frac{1-k^2\eta^2}{\sqrt{1-\tilde{\eta}^2}\,\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}}\, d\tilde{\eta} =$$

$$= i\int_1^{\tilde{\eta}} \left\{ \frac{\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}}{\sqrt{1-\tilde{\eta}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\eta}^2}\,\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}} \right\} d\tilde{\eta} \,. \qquad [111]$$

Der 1.Teil des letzten Integrals ergibt wieder ein elliptisches Integral 2.Gattung, der 2.Teil ein solches 1.Gattung, so daß man schreiben kann:

$$\zeta = i\int_{\pi/2}^{\Phi} \left\{ \sqrt{1-k'^2\sin^2\Phi} - \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Phi}} \right\} d\Phi \quad ; \text{mit } \tilde{\eta} = \sin\Phi \,. \qquad [112]$$

Weil Φ nur für $\Phi, 0<\Phi<\pi/2$ definiert ist, wird mit

$$\int_{\pi/2}^{\Phi} d\Phi = \int_0^{\Phi} d\Phi - \int_0^{\pi/2} d\Phi$$

schließlich die Abbildungsfunktion erhalten:

$$\zeta = i\left\{ \left[E(k',\Phi) - F(k',\Phi)\right] - \left[\tilde{E}(k') - K(k')\right] \right\} , \qquad [113]$$

wobei $\tilde{E} = E(k',\pi/2)$, $K = F(k',\pi/2)$ als vollständige elliptische Integrale bezeichnet werden und durch die oben erwähnte Abbildung des

Intervalls $1<\eta<1/k$ gegeben sind. Die Auswertung muß punktweise erfolgen, wobei die Werte der elliptischen Integrale aus Tabellen zu ermitteln sind. Ein Berechnungsbeispiel findet sich im Anhang auf Seite A 4.

Für ein kanalförmiges Bachbett mit 2.4 m Sohlenbreite und 0.4 m Wandhöhe entsteht so die in Abbildung 74,1 gezeigte Zuordnung von Punkten des Originalbettprofils auf eine transformierte, ebene Bachbettsohle.

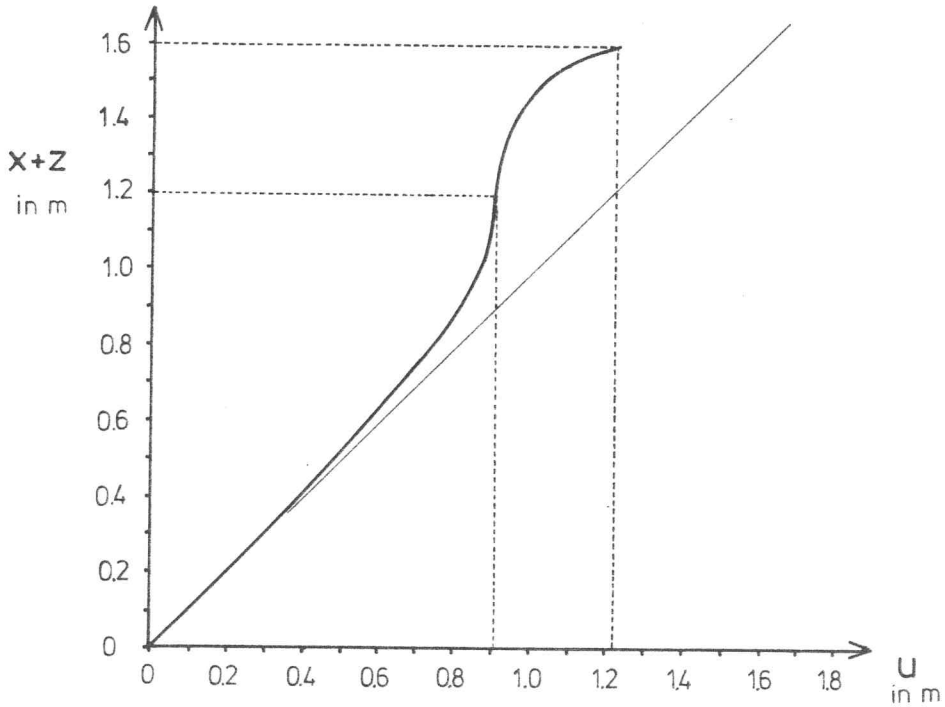


Abb.74,1 : Abbildungskurve von der ζ-Ebene in die η-Ebene für 2b = 2.4m und h = 0.4m

Die Ordinate bezeichnet Punkte auf dem halben Kanalprofil in der ζ-Ebene, die Abszisse gibt die Lage der entsprechenden Punkte in der η-Ebene wieder. So entspricht z.B. dem Punkt x+z = 1.2 der Punkt u = 0.906 oder x+z = 1.6 der Punkt u = 1.219 . Diese Kurve gilt jedoch nur für ein Kanalprofil mit senkrechten Wänden. Da ein sehr flaches Profil mit $\beta\approx\frac{\pi}{2}$ durch die Gerade $\zeta=\tilde{\eta}$ repräsentiert wird, befinden sich alle Abbildungskurven für Böschungswinkel $\beta, 0<\beta<\pi/2$ zwischen dieser Kurve und der Geraden.

6.2.4 Bodenwärmestrom bei ebener Oberfläche

Mit Hilfe der konformen Abbildung wurde diejenige Breite der ebenen Grenzfläche Wasser-Boden gefunden, deren Wärmeaustausch mit der umgebenden ebenen Bodenoberfläche genauso groß ist wie der entsprechende Austausch bei gewinkeltem Bachbettprofil.

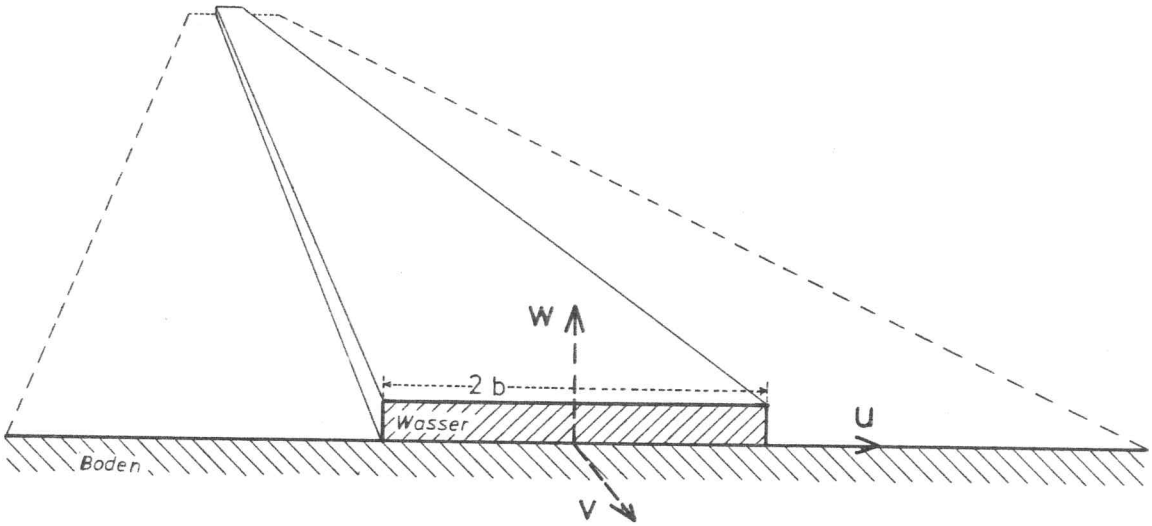


Abb.75,1: Auf der transformierten, ebenen Bodenoberfläche fließender Bach

Es folgt die Herleitung einer Formel, die den gesamten Bodenwärmestrom in jenes Bachbett der Breite 2b beschreibt, welches in Abbildung 75,1 dargestellt ist. Das in dieser Abbildung angegebene Koordinatensystem gilt auch für die Formeln der Herleitung.

6.2.4.1 Thermodynamik im Vollraum

Die momentane Punktquelle

Eine Punktquelle befindet sich im homogenen, isotropen und thermisch ausgeglichenen unendlich ausgedehnten Vollraum und setzt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wärmemenge $Q'\rho_B c_B$ frei. Sind die Koordinaten der Quelle u', v' und w', dann wird die Temperaturdifferenz zur Ausgangstemperatur an einem beliebigen Punkt u, v und w zur Zeit t von Carslaw u. Jaeger, 1959 angegeben als

$$\Delta T(u,v,w,t) = \frac{Q'}{8(\pi \varkappa t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2}{4\varkappa t}\right\}. \qquad [114]$$

Die Quellstärke Q' ist identisch mit der Temperaturerhöhung eines Einheitsvolumens, die durch das Einwirken der spezifischen Wärmemenge $Q'\rho_B c_B/V$ auf dieses Volumen erzielt wird. Wenn $Q'\rho_B c_B$ in Ws und die Temperaturleitfähigkeit $\varkappa$ des Körpers in m^2/s eingesetzt wird, resultiert ΔT in Kelvin als Temperaturzu- oder abnahme am betrachteten Punkt.

Die momentane Linienquelle

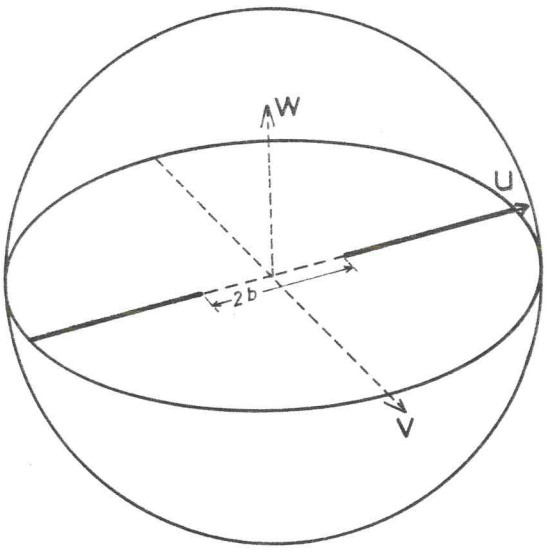


Abb. 76,1 : Linienquelle im Vollraum

Eine Erweiterung der Punktquelle zur unterbrochenen Linienquelle wie in Abbildung 76,1 erfordert die Aneinanderreihung von identischen Punktquellen an der u-Achse von $-\infty$ bis $-b$, b bis ∞. Die Temperaturänderung am Punkt u,v,w wird durch Integration der Gleichung [114] gewonnen:

$$\Delta T(u,v,w,t) = \frac{Q'}{8(\pi \varkappa t)^{3/2}}\left[\int_{-\infty}^{-b} \exp\left\{-\frac{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2}{4\varkappa t}\right\} du' + \int_{b}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2}{4\varkappa t}\right\} du'\right]. \qquad [115]$$

Die Variablensubstitution

$$\frac{u-u'}{\sqrt{4\varkappa t}} = \xi \qquad du' = -\sqrt{4\varkappa t}\; d\xi \tag{116}$$

ergibt mit

$$\int_{-\infty}^{-b} du' = \int_{0}^{-b} du' - \int_{0}^{-\infty} du'$$

für das erste Integral der Gleichung [115]:

$$\int_{-\infty}^{-b} \exp\left\{-\frac{(u-u')^2}{4\varkappa t}\right\} du' = -\sqrt{4\varkappa t}\left\{\int_{\frac{u}{\sqrt{4\varkappa t}}}^{\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}} e^{-\xi^2} d\xi - \int_{\frac{u}{\sqrt{4\varkappa t}}}^{\frac{\infty}{\sqrt{4\varkappa t}}} e^{-\xi^2} d\xi\right\} =$$

$$= -\sqrt{4\varkappa t}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{u}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \left(\operatorname{erf}[\infty] - \operatorname{erf}\left[\frac{u}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]\right)\right\}\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= -\sqrt{\pi\varkappa t}\left\{\operatorname{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - 1\right\}. \tag{117}$$

Die analoge Berechnung des zweiten Integrals der Gleichung [115] führt schließlich zur Temperaturänderung

$$\Delta T(u,v,w,t) = \frac{Q'}{8\pi\varkappa t}\exp\left(-\frac{(v-v')^2+(w-w')^2}{4\varkappa t}\right)\left\{2+\operatorname{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]-\operatorname{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]\right\}. \tag{118}$$

Die momentane Flächenquelle

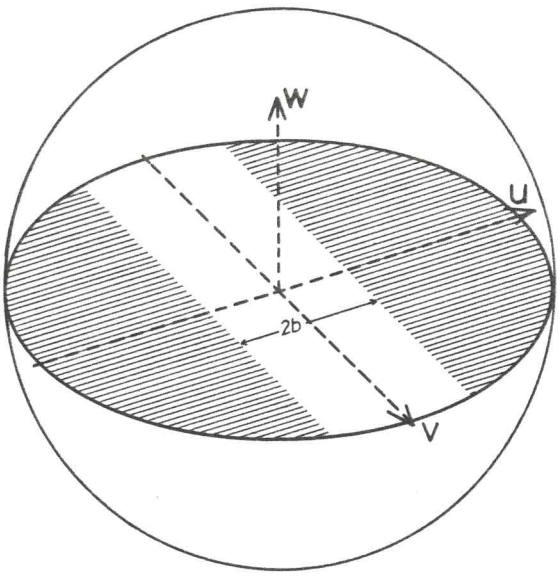


Abb. 77,1 : Flächenquelle im Vollraum

Die Flächenquelle der Abbildung 77,1 entsteht durch Aneinanderlegen von identischen Linienquellen in Richtung v, $-\infty < v < \infty$ und wird durch die Integration der Gleichung [118] über v erreicht:

S. 78

$$\Delta T(u,v,w,t) = \frac{Q'}{8\pi\varkappa t}\, e^{-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-v')^2}{4\varkappa t}}\, dv' \left\{ 2 + \mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] \right\}. \qquad [119]$$

Das Ergebnis

$$\Delta T(u,w,t) = \frac{Q'}{4\sqrt{\pi\varkappa t}} \exp\left(-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa t}\right) \left\{ 2 + \mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] \right\} \qquad [120]$$

ist die Temperaturänderung an einem Punkt mit den Koordinaten u, v, w zur Zeit t, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Fläche

$$u': -\infty \ldots -b,\ b \ldots \infty;\quad v': -\infty \ldots \infty$$

die spezifische Wärmemenge $Q'\rho_B c_B$ frei wird.

Die konstante Flächenquelle

Der Übergang zur konstanten Flächenquelle geschieht durch Integration der Gleichung [120] über die Quellwirkdauer vom Zeitpunkt 0 bis t. Es ergibt sich

$$\Delta T(u,w,t) = \frac{q'}{4\sqrt{\pi\varkappa}} \left\{ 2\int_0^t e^{-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + \int_0^t e^{-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa(t-t')}} \left(\mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right] - \mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right] \right) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \right\}. \qquad [121]$$

ΔT gibt die Temperaturänderung am Punkt mit den Koordinaten u, v, w im unendlich ausgedehnten Vollraum zum Zeitpunkt t an. Die Quelle hat für $t < 0$ die Stärke 0, ab dem Zeitpunkt $t = 0$ die konstante Stärke q', deren Einheit etwa in Km/s folgt, wenn t in s, die Wärmestromdichte $q'\rho_B c_B$ in W/m^2, die Temperaturleitfähigkeit $\varkappa$ in m^2/s und die Breite 2b des Mittelstreifens in m eingesetzt werden. Das erste Integral der Gleichung [121] hat als Lösung

$$\frac{q'}{2\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t e^{-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa(t-t')}} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} = q'\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\, e^{-\frac{(w-w')^2}{4\varkappa t}} - \frac{q'|w-w'|}{2\varkappa}\, \mathrm{erfc}\left[\frac{|w-w'|}{\sqrt{4\varkappa t}}\right], \qquad [122]$$

wobei erfc(x) die komplementäre Errorfunktion erfc(x) = 1 - erf(x) ist.

Für das zweite Integral der Gleichung [121] konnte keine geschlossene allgemeine Lösung gefunden werden. Betrachtet man jedoch nur die

Fläche $w = w'$, also den Zustand in der Quellebene, dann ergibt die Integration von

$$\Delta T(u,w,t)|_{w=0} = \frac{q'}{4\sqrt{\pi\varkappa}} \left\{ 2\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + \int_0^t \mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right]\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} - \int_0^t \mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right]\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \right\} \qquad [123]$$

die Temperaturänderung

$$\Delta T(u,w,t)|_{w=0} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\left\{2+\mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]-\mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right]-\frac{u-b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\mathrm{Ei}\left[-\frac{(u-b)^2}{4\varkappa t}\right]+\frac{u+b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\mathrm{Ei}\left[-\frac{(u+b)^2}{4\varkappa t}\right]\right\}. \qquad [124]$$

Das Exponentialintegral

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi$$

und sein Zusammenhang mit der Errorfunktion wird im Anhang auf Seite A2 und A3 näher erläutert. Abbildung 79,1 zeigt eine mit Gleichung [124] berechnete Temperaturzunahme der unendlich ausgedehnten Ebene $w = w'$, wenn in der gesamten Ebene außer im Streifen

$$u: -b < u < b\ ;\quad v: -\infty < v < \infty\ ;\quad w = w'$$

die aus der Energiebilanzgleichung berechneten realen Wärmestromdichten der Zeiten 6^{00} bis 12^{00} Uhr wirken.

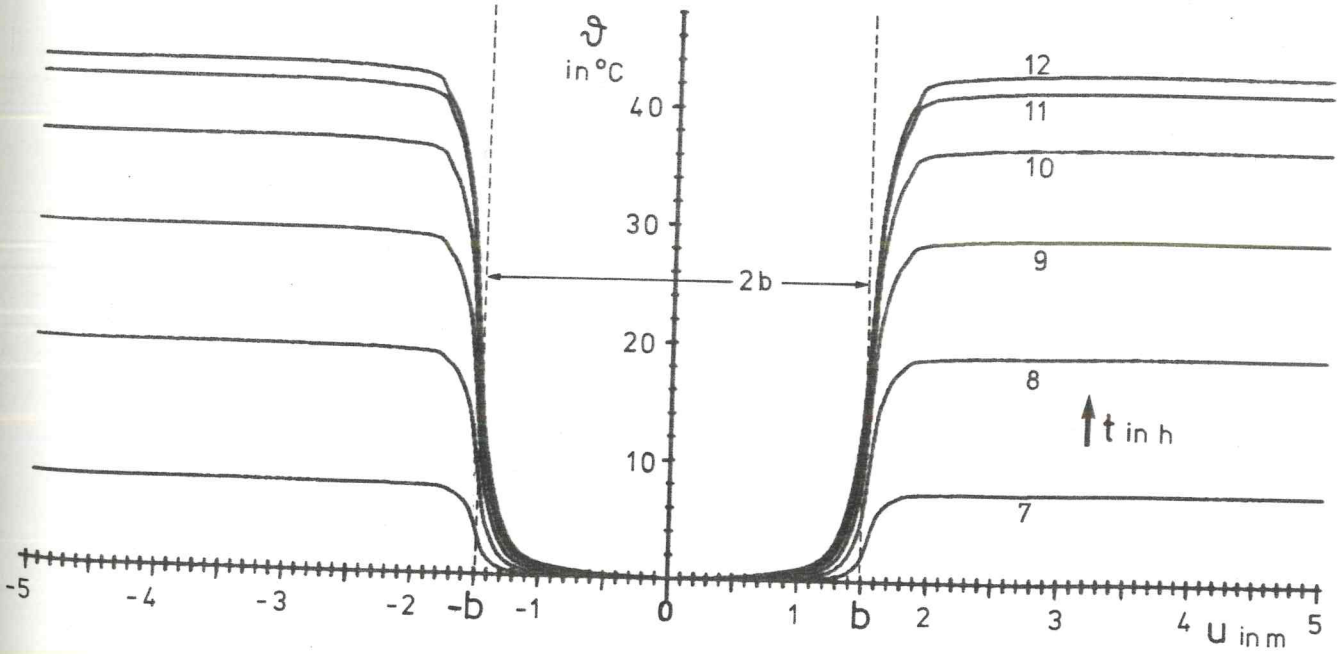


Abb.79,1: Temperatur der Ebene $W=W'$ bis zu 6 Stunden nach Beginn der Wärmezufuhr um 6^{00} Uhr.

6.2.4.2 Wärmeströme im Halbraum

Wie im unendlichen Vollraum ist Gleichung [124] mit Abbildung 79,1 auch auf den halbunendlich ausgedehnten Körper anwendbar. Die Überlegung, daß die in beiden Fällen gleiche Wärmestromdichte an der Fläche $W = W'$ im Halbraum eine doppelt so große Temperaturänderung erzeugt wie im Vollraum, führt zur Multiplikation des Klammerausdrucks mit dem Faktor 2, wenn diese Gleichung im Halbraum gelten soll. In diesem Fall stellt der Mittelstreifen ein vorerst wasserloses und wärmequellenfreies ebenes Bachbett dar, dessen Temperatur sich in hinreichend langer Zeit an die Temperatur der Umgebung anpaßt.

Alle weiteren Berechnungen beziehen sich nun auf den Halbraum der Abbildung 75,1. Aus Gleichung [121] erhält man das Temperaturprofil im Boden sowohl unterhalb der erwärmten Oberfläche als auch unterhalb des Bachbettes, wenn sich auf dem letzteren kein Wasserkörper befindet. Der senkrecht zur Oberfläche fließende Bodenwärmestrom B ergibt sich dann mit der Wärmeleitfähigkeit λ_B zu

$$B(u,w,t) = -\lambda_B \frac{d}{dw} T(u,w,t) ,$$

so daß die Erwärmung der Bodenoberfläche außerhalb des wasserfreien Bachbettes einen Wärmestrom senkrecht zur Bachbettoberfläche der mittleren Dichte

$$\bar{B}(u,w,t)\Big|_{w=0} = -\frac{2\lambda_B}{2b} \left\{ \int_0^b \frac{d}{dw} T(u,w,t)\, du' \right\}\Bigg|_{w=0}$$

verursacht.

Nun soll auf dem Bereich $-b < u < b$ turbulent durchmischtes Wasser in v-Richtung fließen und im Wärmeaustausch mit dem Boden stehen. An der Grenzfläche beider Körper stellt sich dann eine Temperatur T_{WB} ein, die neben den Körpertemperaturen auch von den Wärmeeindringkoeffizienten b_W und b_B des Wassers und des Bodens abhängt. Mit $b_W >> b_B$ zeigt die Beziehung

$$T_{WB} = \frac{T(u,0,t) + \frac{b_W}{b_B} T_W}{1 + b_W/b_B} = \frac{\frac{b_B}{b_W} T(u,0,t) + T_W}{1 + b_B/b_W} \approx T_W \qquad [125]$$

$$b_W = \sqrt{\lambda_W \rho_W c_W} \; ; \quad b_B = \sqrt{\lambda_B \rho_B c_B} ,$$

daß T_{WB} kaum von der Wassertemperatur T_W abweicht.

Der Boden hat mit T_{WB} als Grenztemperatur ein anderes Temperaturtiefenprofil als im isolierten Fall ohne Wasserkörper. Dieses neue Profil $\tilde{T}$ muß in großen Tiefen nahezu identisch sein mit dem Temperaturprofil T unter der nicht mit Wasser bedeckten umgebenden Oberfläche. Beide Profile wurden in Abbildung 81,1 zur Verdeutlichung so dargestellt, als ob ein Boden an seiner Oberfläche gekühlt würde.

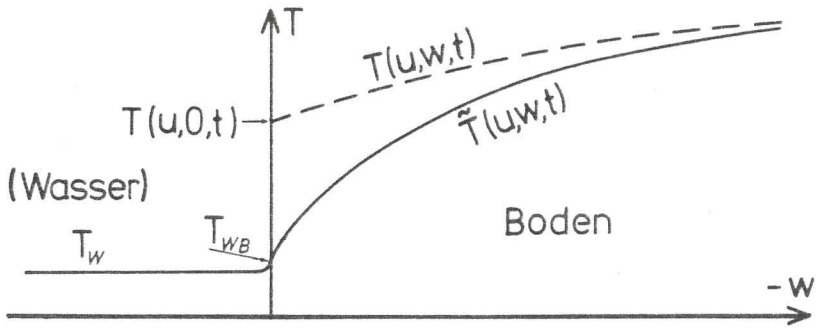


Abb 81,1 : Instationäre Temperaturprofile des Bodens unterhalb des Bachbettes. – – – –: Oberfläche isoliert, ohne Wasser
———: mit Wasserkühlung

Ein Ansatz zur Beschreibung des Profils $\tilde{T}(u,w,t)$ folgt aus der Forderung, daß die Temperaturdifferenz an der Oberfläche der Profile T und $\tilde{T}$ mit zunehmender Tiefe nach der Errorfunktion gegen 0 gehen soll:

$$\tilde{T}(u,w,t) = T(u,w,t) - \left[T(u,0,t) - T_{WB}\right]\left\{1 + \mathrm{erf}\left[\frac{w}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right]\right\} . \quad [126]$$

$\varkappa$ bedeutet die Temperaturleitfähigkeit des Bodens, t' ist der Beginn der Oberflächenerwärmung außerhalb des Bachbettes und t ist der betrachtete Zeitpunkt. Den vertikalen Bodenwärmestrom an der Grenzfläche Wasser-Boden erhält man wiederum als

$$B(u,0,t) = -\lambda_B \frac{d}{dw}\,\tilde{T}(u,w,t)\Big|_{w=0}$$

durch Differenzieren von $\tilde{T}$ nach der Tiefe.

Mit Gleichung [124] und

$$\frac{d}{dw}\left\{T_{WB}\left(1 + \mathrm{erf}\left[\frac{w}{\sqrt{4\varkappa(t-t')}}\right]\right)\right\}\Big|_{w=0} = \frac{T_{WB}}{\sqrt{\pi\varkappa(t-t')}} \approx \frac{T_W}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \; ; \text{wenn } t'=0,$$

ergibt sich für den Bodenwärmestrom an einer Stelle u, $-b < u < b$:

$$B(u,0,t) = \frac{q'\lambda_B}{2\pi\varkappa}\left\{2 + \mathrm{erf}\left[\frac{u-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \mathrm{erf}\left[\frac{u+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] - \right.$$

[127]

$$\left. -\frac{u-b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\mathrm{Ei}\left[-\frac{(u-b)^2}{4\varkappa t}\right] + \frac{u+b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\mathrm{Ei}\left[-\frac{(u+b)^2}{4\varkappa t}\right]\right\} - \frac{\lambda_B T_{WB}}{\sqrt{\pi\varkappa t}}.$$

Um die mittlere Wärmestromdichte $\bar{B}$ im Bachbett zu erlangen, muß Gleichung [127] über die Gesamtbreite 2b integriert und das Ergebnis durch dieselbe dividiert werden. Die Integration der einzelnen Terme aus [127] ergibt:

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{erf}\left[\frac{u'-b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] du' =$$

Variablensubstitution

$$\frac{u'-b}{\sqrt{4\varkappa t}} = x \; ; \; dx = \frac{du'}{\sqrt{4\varkappa t}}$$

$$= \int_{\frac{-2b}{\sqrt{4\varkappa t}}}^{0} \mathrm{erf}(x)\sqrt{4\varkappa t}\, dx = -2b\,\mathrm{erf}\left[\frac{b}{\sqrt{\varkappa t}}\right] + 2\sqrt{\varkappa t/\pi}\left\{1 - e^{-\frac{b^2}{\varkappa t}}\right\}$$

[128]

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{erf}\left[\frac{u'+b}{\sqrt{4\varkappa t}}\right] du' =$$

$$\frac{u'+b}{\sqrt{4\varkappa t}} = x \; ; \; dx = \frac{du'}{\sqrt{4\varkappa t}}$$

$$= \int_{0}^{\frac{2b}{\sqrt{4\varkappa t}}} \mathrm{erf}(x)\sqrt{4\varkappa t}\, dx = 2b\,\mathrm{erf}\left[\frac{b}{\sqrt{\varkappa t}}\right] - 2\sqrt{\varkappa t/\pi}\left\{1 - e^{-\frac{b^2}{\varkappa t}}\right\}$$

$$-\int_{b}^{b}\frac{u'-b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei\left[-\frac{(u'-b)^2}{4\varkappa t}\right]du' = \qquad \left\| \frac{(u'-b)^2}{4\varkappa t}=x\,;\; dx=\frac{u'-b}{2\varkappa t}du' \right.$$

$$= -\int_{\frac{b^2}{\varkappa t}}^{0}\frac{u'-b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei[-x]\frac{2\varkappa t}{u'-b}dx = \frac{b^2}{\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei\left[-\frac{b^2}{\varkappa t}\right] - \sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\left\{1-e^{-\frac{b^2}{\varkappa t}}\right\} \qquad [129]$$

$$-\int_{b}^{b}\frac{u'+b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei\left[-\frac{(u'+b)^2}{4\varkappa t}\right]du' = \qquad \left\| \frac{(u'+b)^2}{4\varkappa t}=x\,;\; dx=\frac{u'+b}{2\varkappa t}du' \right.$$

$$= -\int_{\frac{b^2}{\varkappa t}}^{0}\frac{u'+b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei[-x]\frac{2\varkappa t}{u'+b}dx = \frac{b^2}{\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei\left[-\frac{b^2}{\varkappa t}\right] - \sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\left\{1-e^{-\frac{b^2}{\varkappa t}}\right\}$$

Damit folgt für die mittlere Dichte des Bodenwärmestromes an der Grenzfläche Wasser-Boden:

$$\bar{B} = \frac{q'\lambda_B}{\pi\varkappa}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{b}{\sqrt{\varkappa t}}\right] + \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\left[1-e^{-\frac{b^2}{\varkappa t}}\right] + \frac{b}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}Ei\left[-\frac{b^2}{\varkappa t}\right]\right\} - \frac{\lambda_B T_{WB}}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\,. \qquad [130]$$

Diese Formel beschreibt den Wärmestrom zur Zeit t, welcher von der außerhalb des Bachbettes gelegenen unendlich ausgedehnten Bodenoberfläche zur Bachbettsohle der transformierten Breite 2b fließt, wenn in der Bodenoberfläche ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine Wärmequelle der konstanten Dichte $q'\rho_B c_B$ wirkt und sich das Boden-Wasser-System vor der Zeit $t = 0$ im thermischen Gleichgewichtszustand befunden hat. $\varkappa, \lambda_B, \rho_B$ und c_B bezeichnen die Temperaturleitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, Dichte und spezifische Wärmekapazität des Bodens. Entsprechend der Herleitung waren aber alle auftretenden Temperaturen ab der Gleichung [115] immer nur Temperaturänderungen gegenüber einer einheitlichen Ausgangstemperatur des Körpers. So ist auch T_{WB} die

Änderung der Grenzschichttemperatur seit Beginn der Bodenerwärmung und nur dann die Temperatur der Grenzfläche Wasser-Boden in °C, wenn der Boden vor dem Zeitpunkt $t' = 0$ die Temperatur $\vartheta_B = 0°C$ hatte. Schreibt man für T_{WB} eine Temperaturdifferenz ΔT, dann ist der Term

$$-\frac{\lambda_B \Delta T}{\sqrt{\pi \varkappa t}}$$

identisch mit

$$\bar{B} = -\sqrt{\frac{\lambda_B \rho_B c_B}{\pi t}}\,\Delta T \qquad [131]$$

in Gröber, Erk, Grigull, 1961 und beschreibt die Wärmestromdichte an der Oberfläche eines halbunendlich ausgedehnten Körpers, dessen Temperatur an dieser Grenzfläche zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Sprung um ΔT macht und dann konstant gehalten wird.

Wenn man jetzt wegen besserer Anschaulichkeit wieder das Trapezprofil betrachtet, dann ist in Gleichung [130] der Klammerausdruck mit Vorfaktor, im weiteren mit B1 bezeichnet, als diejenige mittlere Wärmestromdichte zu interpretieren, die an der Grenzfläche Wasser-Boden auf Grund von Energiebilanzänderungen an der gesamten freien Bodenoberfläche auftritt und hauptsächlich eine horizontale Komponente aufweist. Der Term

$$B2 = -\frac{\lambda_B \Delta T}{\sqrt{\pi \varkappa t}} \qquad [132]$$

beschreibt dann einen vertikalen Wärmestrom zwischen Wasser und Boden, der durch die Änderung der Wassertemperatur am gleichen Ort verursacht wird.

Die Erweiterung vom einmaligen Sprung der Wärmestromdichte an der Oberfläche zur zeitlich variablen Wärmequelle wird analog zur Gleichung [100] durch Summation der Stundenwerte durchgeführt:

$$\bar{B} = \frac{\lambda}{\pi \varkappa} \sum_{j=n}^{k} \Big\{ q'(j) \Big[\operatorname{erfc}\Big(\frac{b(j)}{\sqrt{\varkappa (t_k - j\Delta t + 0{,}5)}}\Big) + \frac{1}{2b(j)} \sqrt{\frac{\varkappa (t_k - j\Delta t + 0{,}5)}{\pi}} \Big(1 - e^{\frac{-b^2(j)}{\varkappa (t_k - j\Delta t + 0{,}5)}}\Big) +$$

$$+ \frac{b(j)}{2\sqrt{\pi \varkappa (t_k - j\Delta t + 0{,}5)}}\, Ei\Big(\frac{-b^2(j)}{\varkappa (t_k - j\Delta t + 0{,}5)}\Big) \Big] - \frac{\sqrt{\pi \varkappa}\, \Delta T_{WB}(j)}{\sqrt{t_k - j\Delta t + 0{,}5}} \Big\}. \qquad [133]$$

Damit steht nun eine Formel für die Berechnung des Bodenwärmestroms bei zeitlich variablen Energiebilanzen an der Bodenoberfläche zur Verfügung, in die zwar variable Bachbreiten eingehen, die Wärmeentnahme durch Überflutung des Ufers aber noch nicht mit einbezogen ist.

Im realen Trapezprofil wird bei Vergrößerung der Wassertiefe um Δh_w ein Uferbereich Δs_U überflutet und es findet ein Energieaustausch zwischen dem Wasser und diesem Bereich des Bodens statt. Im allein interessierenden Fall, daß der Wasserspiegel über die Höhe des Uferknickes steigt, ist

$$\Delta s_U = \Delta h_w / \cos\alpha . \qquad [134]$$

Δh_w errechnet sich aus den Wassertiefen zu den Zeiten t_U und $t_U + \Delta t$, der Zeitschritt Δt beträgt hier eine Stunde.

Vor der Überflutung soll dieser Uferstreifen wie auch der vom Bachbett weiter entfernte Boden das in Gleichung [100] angegebene Temperaturprofil haben,

$$T(z,t_U) = T_{t_U} - \sum_{j=1}^{U} (T_{j-1} - T_j)\, \mathrm{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(t_U - j\Delta t + 0{,}5)}}\right]. \qquad [135]$$

$T(z,t_U)$ ist die Temperatur in der Tiefe z zur Zeit t_U, dem Beginn der Überflutung, die Summation beginnt mit T_0 als erster Oberflächentemperatur. Die Oberflächentemperaturen können gemessenen oder wie hier mit einer Energiebilanzgleichung errechnet werden.

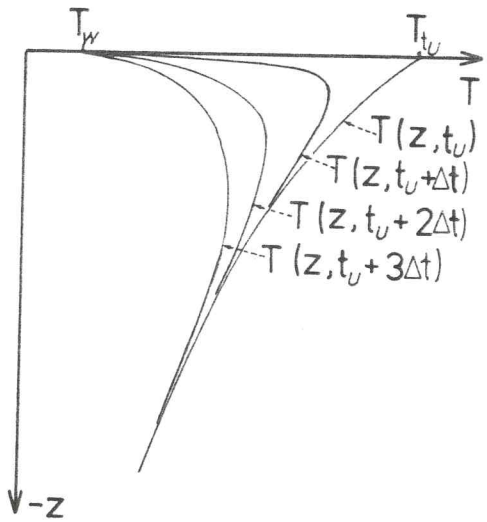


Abb.85,1: Temperaturprofile eines Uferstreifens nach Überflutung

Während des Zeitintervalls $t_U \ldots t_U + \Delta t$ wird nun dieser Streifen vom Wasser überspült und nimmt an seiner Oberfläche die Wassertemperatur $T_w(t_U + \Delta t)$ an. Der Beginn des Kontaktes wird auf $t_U + \Delta t/2$ festgelegt.

Dann wird das Temperaturprofil des Bodens für Zeiten $t > t_U + \Delta t/2$, und solange die Überflutung andauert, den in Abbildung 85,1 gezeigten instationären Verlauf haben. Dieser kann mit Gleichung [126] bestimmt werden zu

$$T(z,t) = T(z,t_U) - (T_{t_U} - T_w)\left\{1 + \mathrm{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(t - t_U + 0{,}5)}}\right]\right\}. \qquad [136]$$

Bei steigendem Wasserspiegel wird der Energieaustausch eine Wärmeentnahme aus dem Boden sein, der Wärmefluß also vom Boden zum Wasser gerichtet sein. Dieser beträgt zum Zeitpunkt $t = t_U + i\Delta t$:

$$q(z, t_U + i\Delta t)\Big|_0 = -\lambda_B \frac{d}{dz}\, T(z, t_U + i\Delta t)\Big|_{z=0} \frac{\Delta s_U}{b} =$$

$$= -\lambda_B \left\{ \frac{d}{dz} T(z, t_U) - \frac{d}{dz}(T_{t_U} - T_W)\left\{1 + \mathrm{erf}\left[\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(i\Delta t + 0{,}5)}}\right]\right\}\right\}\Bigg|_{z=0} \frac{\Delta s_U}{b} =$$

$$= -\lambda_B \left\{ \sum_{j=1}^{t_U} \frac{-(T_{j-1} - T_j)}{\sqrt{\pi\varkappa(t_U - j + 0{,}5)}} - \frac{(T_{t_U} - T_W)}{\sqrt{\pi\varkappa(i\Delta t + 0{,}5)}} \right\} \frac{\Delta s_U}{b} \quad . \quad [137]$$

In Gleichung [137] beschreibt der erste Term der rechten Seite die Energiezufuhr, die das Temperaturprofil $T(z, t_U)$ aufbaut, der zweite Term erzeugt das Profil $T(z, t_U + i\Delta t)$. Die Fläche zwischen beiden Tautochronen ist dann ein Maß für die bis zur Zeit t diesem Streifen entnommene Wärmemenge.

Analog werden die Wärmeentnahmen weiterer überfluteter Uferstreifen berechnet, so daß sich als gesamter Wärmestrom aus N Streifen, die zur Zeit $t_{UN'}$ überspült werden, ergibt:

$$B3 = \sum_N q(0, t) =$$

$$= \lambda_B \left\{ \sum_{j=1}^{U1} \frac{T_{j-1} - T_j}{\sqrt{\pi\varkappa(t_{U1} - j\Delta t + 0{,}5)}} + \frac{T_{t_{U1}} - T_W}{\sqrt{\pi\varkappa(t - t_{U1} + 0{,}5)}} \right\} \frac{\Delta s_{U1}}{b_1} +$$

$$+ \lambda_B \left\{ \sum_{j=1}^{U2} \frac{T_{j-1} - T_j}{\sqrt{\pi\varkappa(t_{U2} - j\Delta t + 0{,}5)}} + \frac{T_{t_{U2}} - T_W}{\sqrt{\pi\varkappa(t - t_{U2} + 0{,}5)}} \right\} \frac{\Delta s_{U2}}{b_2} +$$

$$+ \cdots$$

$$= \lambda_B \sum_N \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^{UN'} \frac{T_{j-1} - T_j}{\sqrt{\pi\varkappa(t_{UN'} - j\Delta t + 0{,}5)}} + \frac{T_{t_{UN'}} - T_W}{\sqrt{\pi\varkappa(t - t_{UN'} + 0{,}5)}} \right\} \frac{\Delta s_{UN'}}{b_{N'}} \right\} .$$

[138]

Hier bedeuten N' als Index die Nummer des Streifens, $t_{UN'}$ der Zeitpunkt seiner Überspülung, $T_{t_{UN'}}$ die Oberflächentemperatur kurz vor der Überflutung, $\Delta s_{UN'}$ die Breite dieses Streifens und $b_{N'}$ die Breite der Grenzfläche Wasser-Boden von der Bachmitte bis zum Wasserrand.

Bei wieder sinkendem Wasserspiegel muß eine entsprechende Streifenbreite aus der Summation entfernt werden. Dennoch wird dem als Speicher wirkenden Boden weiterhin Wärme entnommen. Die Auswirkungen dieses Wärmespeichereffektes auf die Wassertemperatur zeigt das Kapitel 6.3.

6.3 Ergebnisse des Trapezprofilmodells

Mit Hilfe der in den Kapiteln 5 und 6 beschriebenen Methoden kann nun die Temperatur berechnet werden, die der Vernagtbach an der Pegelstation haben sollte. Gerechneter und gemessener Tagesgang der Wassertemperatur werden dann gut übereinstimmen, wenn die Profilparameter der 7 Bachbetten so gewählt werden, daß das hydrologische Verhalten der Modellbäche jenem der realen Bäche entspricht. Neben den unverändert geltenden Angaben der Tabelle 1 auf Seite 4 haben sich die in Tabelle 9 aufgeführten Parameter als geeignet erwiesen.

Tabelle 9: Trapezprofilparameter der 7 Modellbäche

Bach Nr.	1	2	3	4	5	6	7	Einheit
a) Sohlenbreite 2b	1	1	1	1	1	1	1	m
b) Sohlenbreite 2b nach einer Einmündung		1.0	1.2	1.4			2.0 3.0 3.6	m m m
c) Knickhöhe h_k	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.15	0.05	m
d) Knickhöhe h_k nach einer Einmündung		0.10	0.13	0.16			0.30 0.40 0.50	m m m
e) Böschungswinkel β	70	70	70	70	70	70	70	Grad
f) Böschungswinkel α	89	89	89	89	89	80	85	Grad
g) Böschungswinkel α nach Einmündung		89	89	89			85 70 60	Grad Grad Grad

In Tabelle 9 sind in den Zeilen a, c, e und f die Sohlenbreiten, die Knickhöhen und die Böschungswinkel der Bäche aufgelistet, welche vom Austritt aus dem Gletscher bis zu einem Zusammenfluß verwendet werden. Die Zeilen b, d und g geben die Parameter des betreffenden Baches unmittelbar nach einer Einmündung im Sinne der Abbildung 2,1 an. Für den Bach Nr.7 beziehen sich die drei Angaben auf die Profile nach den Einmündungen der Bäche Nr.5, 6 und 4.

Diese Wahl der Profile erzeugte bei vorgegebenem zeitlichem Verlauf der Durchflußmenge den in der Abbildung 90,1 gezeigten Tagesgang der benetzten Bachsohlenbreite, dargestellt für den jeweils letzten Integrationspunkt jedes Baches direkt vor einer Einmündung bzw. an der Pegelstation. An diesen Stellen sinken die Wasserspiegel der Bäche

1, 2, 3, 4 und 6 niemals unter die Höhe des Uferknickes. Bach 5 steigt zwischen 11^{00} und 12^{00} Uhr über die Knickhöhe, Bach 7 dagegen an seinem letzten Integrationspunkt, der Pegelstation, zu keiner Zeit.

Zahlenwerte für diese wie auch für alle anderen Kurven des Kapitels 6.3 finden sich im Anhang auf den Seiten A9 ff.

In Abbildung 90,2 sind, ebenfalls für die Endpunkte, die Tiefen der Bäche 1, 4 und 7 angegeben. Der Verlauf der meßbaren Tiefen h_w in Bachmitte ist mit einem nachgestellten a bezeichnet. Analog bezeichnet b die nach Gleichung [83] über den Querschnitt gemittelte Wassertiefe $\bar{h}_w$ und c die reduzierte Wassertiefe h_r nach Gleichung [87].

Erwartungsgemäß differieren die Tiefe in Bachmitte und die mittlere Tiefe umso mehr, je weiter ein Bachufer überströmt wird. Bei sehr weitem Überfluten des flachen Uferbereiches weicht jedoch auch die reduzierte Tiefe merklich von der mittleren Tiefe ab. Diese zusätzliche Abweichung beträgt im extremsten Fall bei Bach 4 um 16^{00} Uhr 17% von $\bar{h}_w$. Bach 7 tritt an der Pegelstation nicht über seine Knickhöhe und hat deswegen identische mittlere und reduzierte Wassertiefen.

In Abbildung 92,1 wird der Verlauf der über alle Bäche gemittelten Energiebilanzterme sowie zum Vergleich nochmals die an der Pegelstation gemessene Globalstrahlung G angegeben. Die Mittelung wurde über die 90 Integrationspunkte des gesamten Bachsystems durchgeführt.

$\overline{G'}$ ist der vertikale Anteil der auf die Wasseroberfläche fallenden Globalstrahlung, nachdem diese in ihre Komponenten I und H zerlegt und die Abschattung berücksichtigt wurde. Diese Kurve weist um 6^{00}, 7^{00} und 18^{00} Uhr höhere Werte als die gemessene Globalstrahlung auf. Die Ursache darür liegt in der genannten Zerlegungsmethode, die bei geringen Sonnenhöhen nur mit Einschränkungen verwendet werden kann. Für Zeiten früher als 6^{00} Uhr und später als 18^{00} Uhr, also wenn die Sonne unter den Horizont gesunken ist, versagt diese Methode wegen Gleichung [5] und [6], so daß zu diesen Zeiten für G' die Werte der gemessenen Globalstrahlung herangezogen wurden.

Die gemittelte absorbierte Globalstrahlung ist in der Kurve $\overline{G''}$ dargestellt. Die Differenz zwischen $\overline{G'}$ und $\overline{G''}$ ist ein Maß für die mittlere Reflexstrahlung.

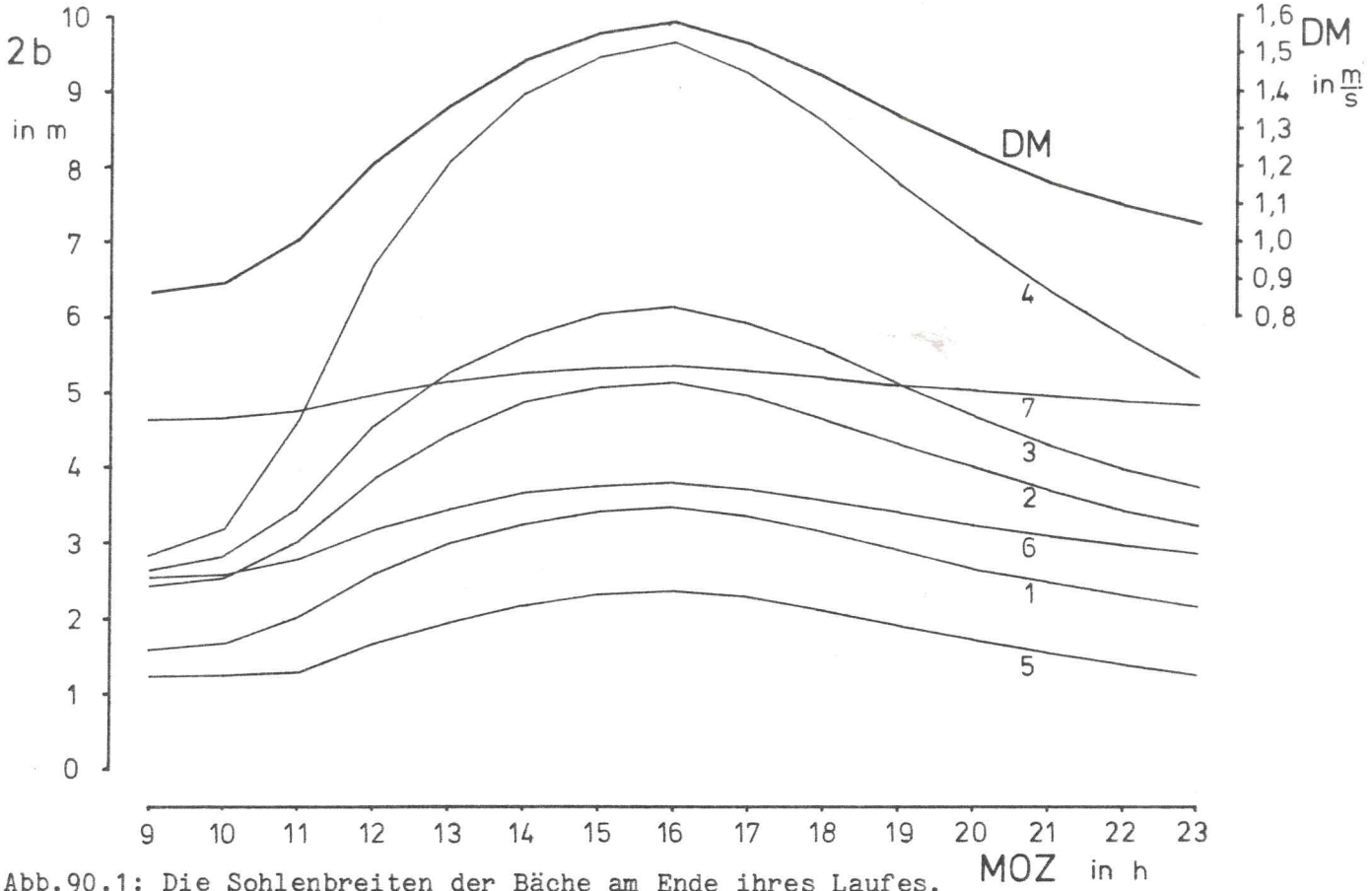


Abb.90,1: Die Sohlenbreiten der Bäche am Ende ihres Laufes.
Die Zahlen an den Kurven geben die Bachnummern an.
Zum Vergleich die Durchflußmenge DM am Pegel.

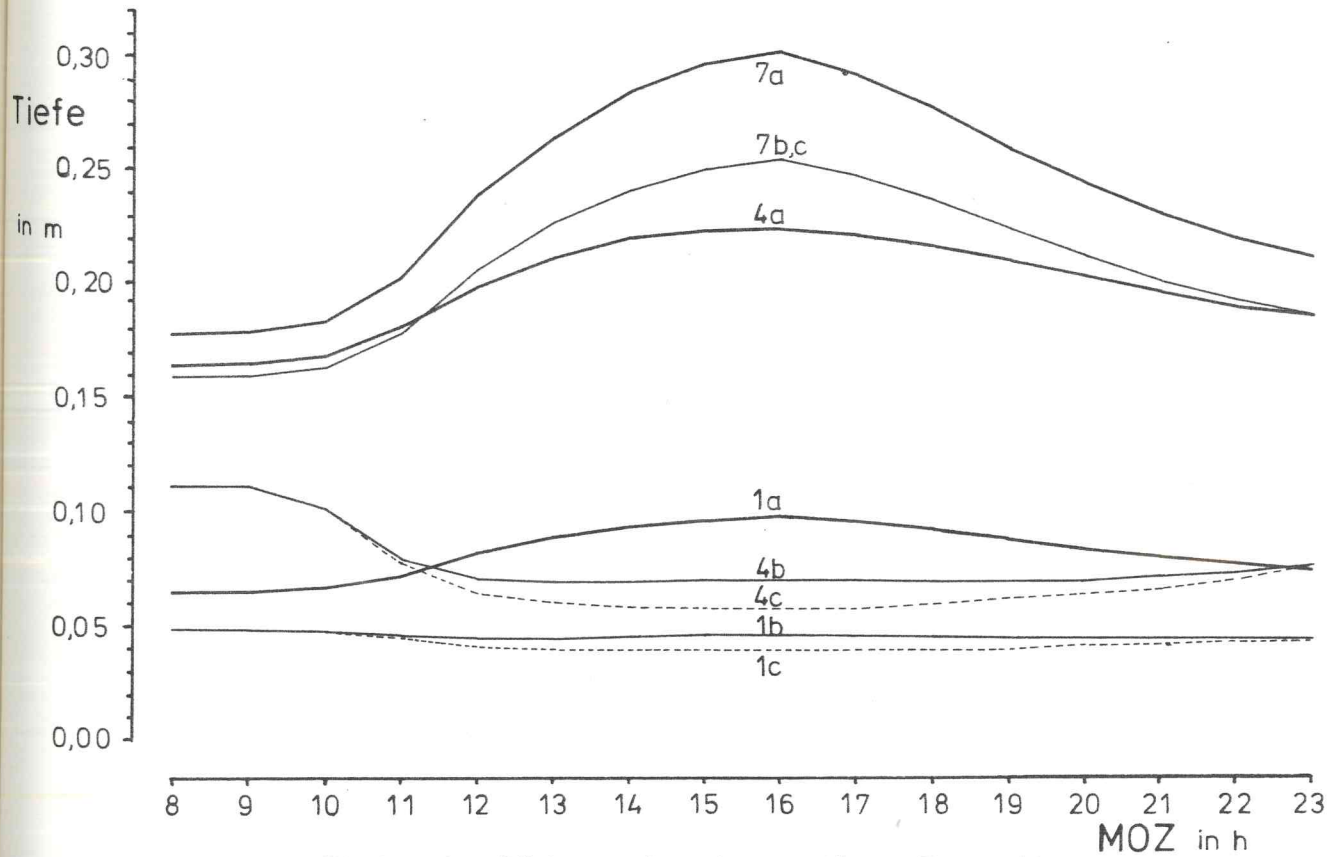


Abb.90,2: Die Tiefen der Bäche 1, 4 und 7 an ihren Endpunkten.
a: Tiefe in Bachmitte h_w
b: über den Fließquerschnitt gemittelte Tiefe $\bar{h}_w$
c: reduzierte Tiefe h_r

Die Kurve $\bar{Q}$ zeigt die gemittelte Strahlungsbilanz nach Gleichung [3]. Während der Nachtstunden wird die Strahlungsbilanz nur von der Gegenstrahlung und der überwiegenden Ausstrahlung des Wassers bestimmt. Die Strahlungsbilanz wirkt deshalb zwischen 18^{00} und 7^{00} Uhr für das Bachsystem wie eine Wärmesenke.

Dagegen führt der gemittelte Strom der fühlbaren Wärme $\bar{L}$ dem Wasser ständig Wärme zu.

Der Strom latenter Wärme $\bar{V}$ ist meistens negativ und erreicht nur in der Zeit zwischen 19^{00} und 22^{00} Uhr wegen hoher relativer Luftfeuchtigkeit positive Werte.

Die Energiedissipation P leistet einen konstanten Beitrag zur Erhöhung der Wassertemperatur am Pegel, wie auf Seite 23 gezeigt wurde. In der hier gewählten Darstellung als äquivalente Wärmestromdichte nach Gleichung [42] besteht aber zwischen P und der Wassertiefe ein linearer Zusammenhang. Wird zur Berechnung von $\bar{P}$ die Wassertiefe h_w in Bachmitte verwendet, führt dies bei vermehrter Durchflußmenge zu einer starken Zunahme der mittleren Dissipation, wie die Kurve $\bar{P}(h_w)$ zeigt. Die Berechnung von $\bar{P}$ mit der über den Fließquerschnitt gemittelten Wassertiefe bedeutet eine zu allen Zeiten geringere äquivalente Wärmestromdichte. Die reduzierte Wassertiefe h_r vermag, wie Kurve $\bar{P}(h_r)$ zeigt, im wesentlichen nur das Maximum der Kurve $\bar{P}(\bar{h}_w)$ zu glätten, differiert aber in den Nacht- und Morgenstunden von $\bar{P}(\bar{h}_w)$ nur um etwa 3%.

Der gemittelte Bodenwärmestrom B1 bedeutet den Wärmefluß zum Bachbett wegen Erwärmung der außerhalb des Baches gelegenen Bodenoberfläche, B2 den meistens negativ gezählten Wärmestrom zwischen Wasser und Boden wegen Änderung der Wassertemperatur und B3 den Wärmeaustausch durch das Überfluten des Ufers. In der Mittelung über alle Bachpunkte erweist sich $\overline{B1}$ als nahezu konstanter Wärmestrom vom Boden zum Wasser. Im Gegensatz dazu ändert sich $\overline{B2}$ mit den Gradienten der Wassertemperaturen, bleibt aber mit einem absoluten Maximalwert von 13 W/m^2 relativ gering.

Der Bodenwärmestrom $\overline{B3}$ ist jedoch in seiner Bedeutung mit der Strahlungsbilanz $\bar{Q}$ gleichzusetzen. Die Phasenverschiebung zwischen $\bar{Q}$ und $\overline{B3}$ hängt entscheidend vom Überströmverhalten der Bäche und damit den Profilparametern sowie von der im Boden gespeicherten Wärmeenergie ab. Die Summe der drei Arten des Bodenwärmestroms $\overline{B1}-\overline{B2}+\overline{B3}$ ist der dem Bachsystem zufließende gesamte mittlere Bodenwärmestrom und wird in Kurve $\bar{B}$ dargestellt.

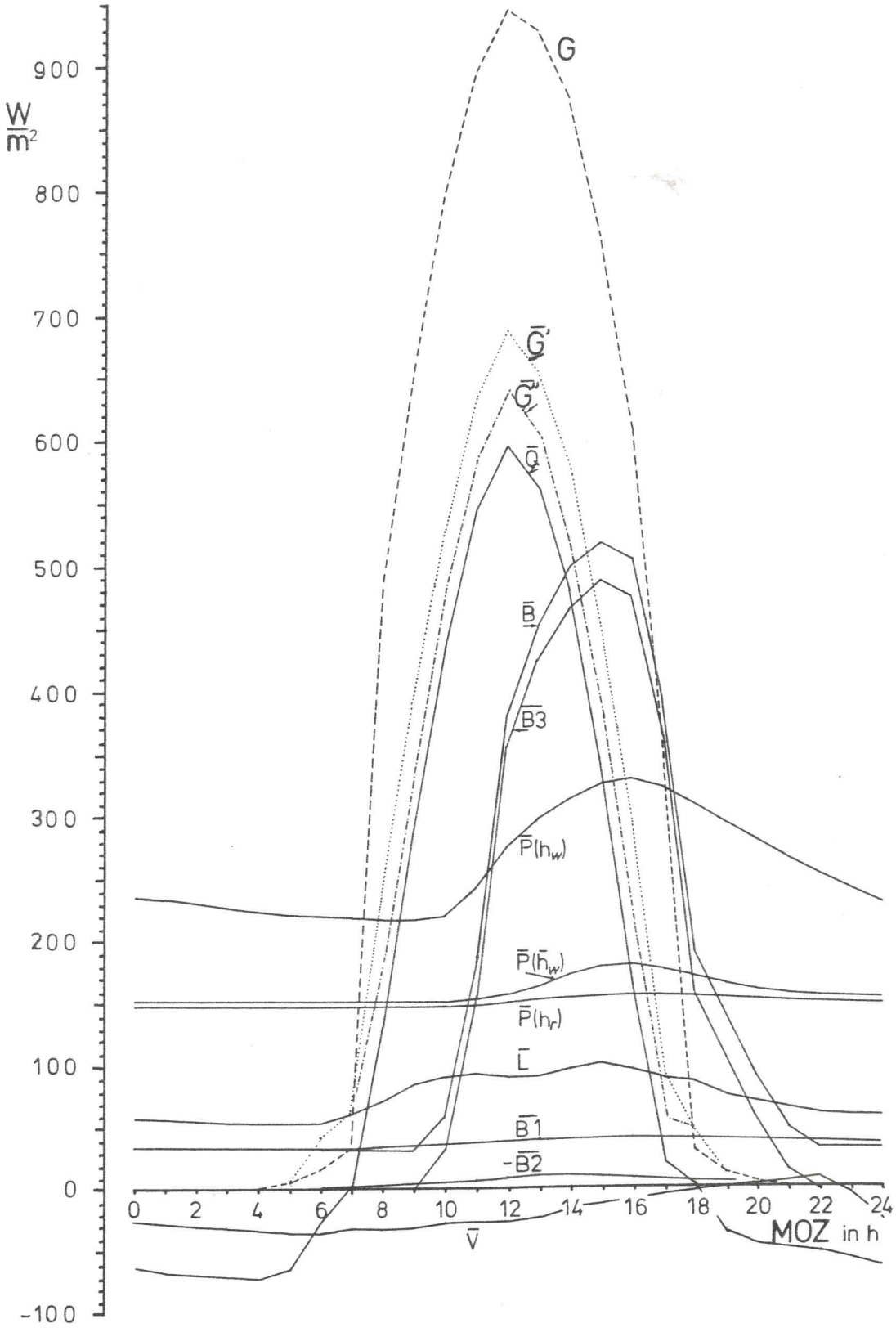


Abb.92,1: Tagesgang der Globalstrahlung G an der Pegelstation sowie der über alle Bachpunkte gemittelten Energiebilanzterme.

In Abbildung 94,1 und etwas deutlicher in Abbildung 95,1 wird nun der gemessene Tagesgang der Wassertemperatur an der Pegelstation den gerechneten Temperaturen gegenübergestellt. Die gemessenen Temperaturen sind mit 1/10 Kelvin Genauigkeit gegeben und werden durch Kurve 1 repräsentiert.

Kurve 2 zeigt die Temperaturen an der Pegelstation, wenn das Trapezprofilmodell mit allen in dieser Arbeit beschriebenen Einflußgrößen berechnet wird. In diesem Fall ergibt sich für die Zeit von 10^{00} bis 18^{00} Uhr eine Übereinstimmung mit gemessenen Werten bis auf 0.25 Kelvin genau. In den Morgenstunden zeigt sich aber eine Differenz zu den Meßwerten, die im Durchschnitt 0.4 Kelvin beträgt und um 7^{00} Uhr auf 0.6 Kelvin anwächst. In der Zeit von 20^{00} bis 23^{00} Uhr ist dagegen die gemessene Temperatur um bis zu 0.2 Kelvin höher als die gerechnete. Für die morgendliche Diskrepanz könnte eventuell ein vom Gletscher talwärts wehender Wind verantwortlich sein, dessen Temperatur in Bodennähe merklich von der Temperatur in der Meßhöhe 2 m verschieden ist. Die Ursache für diese Unstimmigkeiten konnte letztlich aber nicht vollständig geklärt werden.

Wird der Bodenwärmestrom B1 nicht in die Rechnung mit einbezogen, dann zeigt Kurve 3, daß diese Vernachlässigung die Wassertemperatur zu allen Zeiten gleichmäßig um nur 0.1 Kelvin verringert.

Kurve 4 gibt die Temperaturen an, wenn zusätzlich ohne B2 gerechnet wird. Hier beträgt die Abweichung von Kurve 3 nochmals 0.04 Kelvin, jedoch ist diese Abweichung eine Annäherung an Kurve 2, da der Bodenwärmestrom B2 in der Summe B negativ gezählt wird. Somit verursacht die Vernachlässigung von B1 und B2 zusammen nur einen maximalen Fehler von 0.07 Kelvin.

Aus der zusätzlichen Vernachlässigung der Abschattung folgen um 0.02 Kelvin höhere Wassertemperaturen zu den Zeiten 8^{00} und 16^{00} Uhr, die aber in den Abbildungen 94,1 und 95,1 nicht eingezeichnet sind. Zu allen anderen Zeiten gibt es keine Abweichungen. Damit erweist sich die Abschattung für die Berechnung der Wassertemperatur des Vernagtbaches als nicht erforderlich.

Die alleinige Wirkung der Trapezprofilierung mit Dispersionsansatz zeigt die Kurve 5. Dieser Verlauf der Wassertemperatur entsteht bei

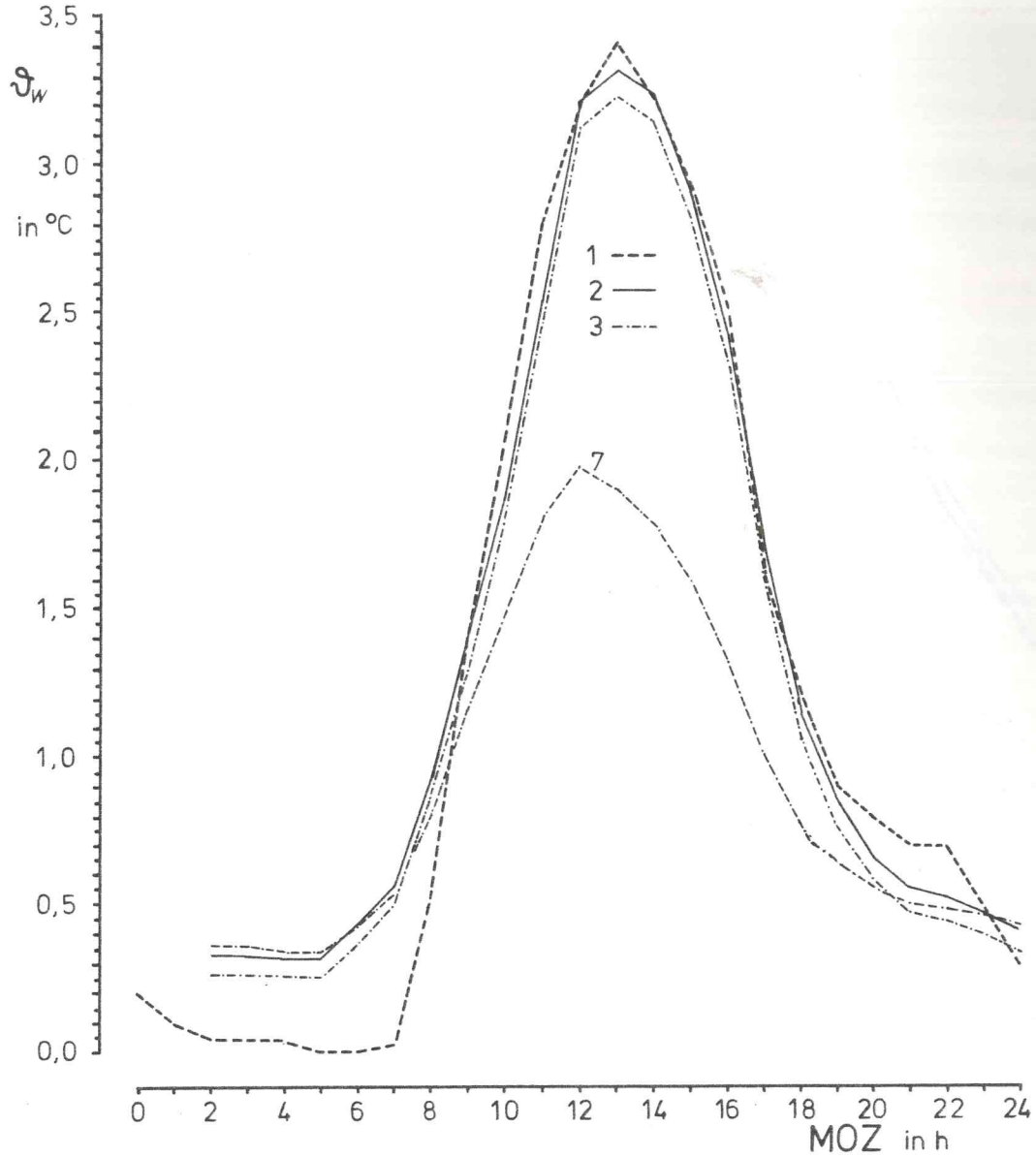


Abb.94,1: Gemessene und einige berechnete Wassertemperaturen des Trapezprofilmodells. Kurvenbezeichnung wie in Abbildung 95,1.

der Berechnung mit Abschattung und der reduzierten Tiefe h_r, aber ohne jeden Bodenwärmestrom. Kurve 5 ist bis 9^{00} Uhr identisch mit Kurve 4 und weicht von ihr ab 10^{00} Uhr um bis zu 1.3 Kelvin ab. Das Maximum liegt um 12^{00} Uhr bei 2.2 C.

Erheblich zu große Abweichungen von der Kurve 2 werden aber bei Verwendung der mittleren Wassertiefe $\bar{h}_w$ anstelle der reduzierten Tiefe h_r erhalten, wie Kurve 6 zeigt. Um eine Vergleichbarkeit mit Kurve 2 zu erreichen, wurde Kurve 6 außerdem mit B1, B2, B3 und der Abschattung gerechnet. In diesem Fall ergeben sich für die Zeit von 10^{00} bis 18^{00} Uhr

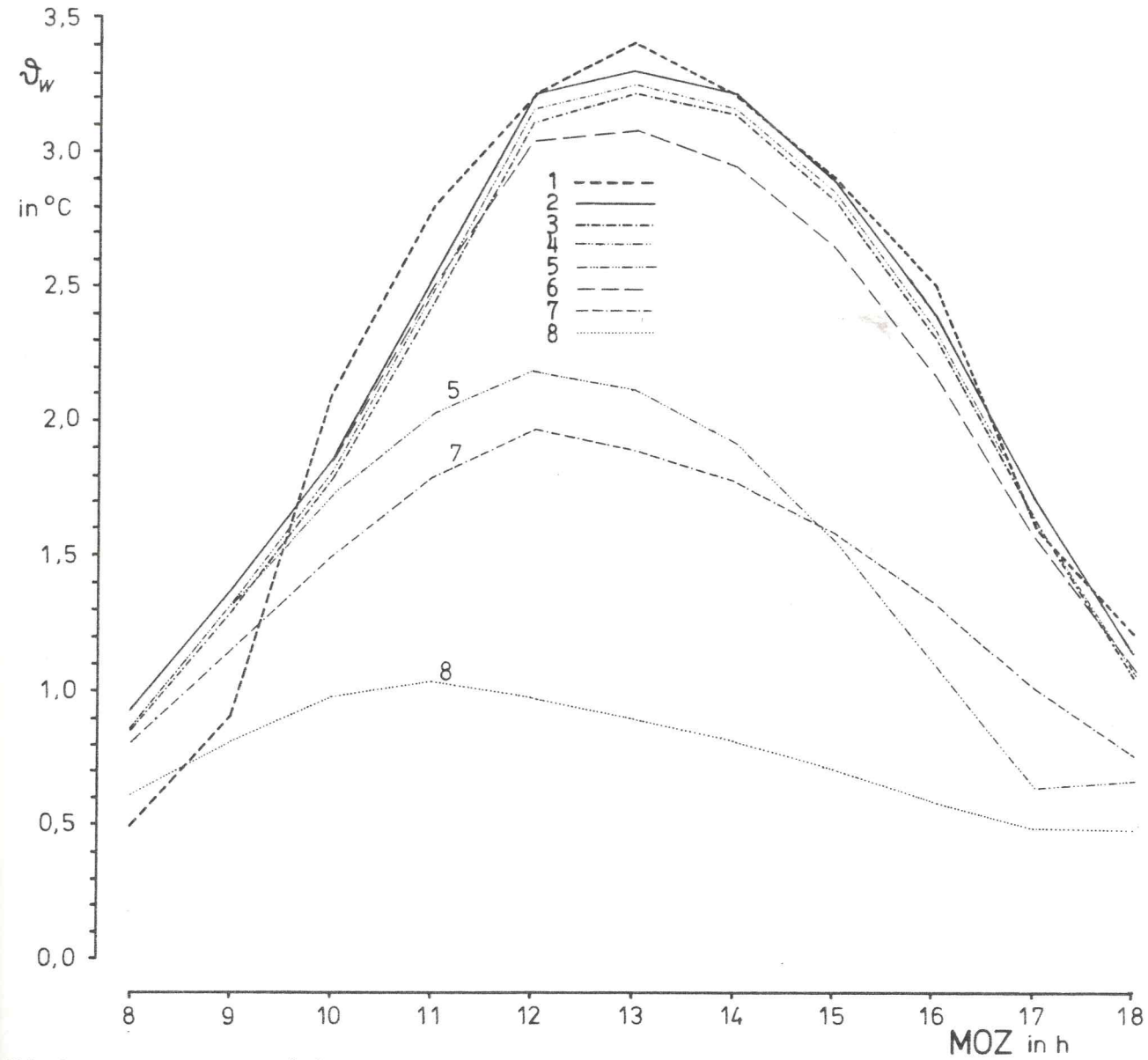


Abb.95,1: Gemessene (1) und berechnete Wassertemperaturen des Trapezprofilmodells (2-7) an der Pegelstation.
2: mit B1, B2, B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r
3: mit B2, B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r
4: mit B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r
5: mit Abschattung und reduzierter Tiefe h_r
6: mit B1, B2, B3, Abschattung und mittlerer Tiefe $\bar{h}_w$
7: mit B1, B2, B3, Abschattung und Tiefe in Bachmitte h_w
8: Kanalmodell, Kurve 1 in Abbildung 41,2

um bis zu 0.3 Kelvin zu tiefe Temperaturen. Abbildung 95,1 zeigt deutlich, daß die Berechnung mit der mittleren Wassertiefe $\bar{h}_w$ an Stelle von h_r den bisher größten Fehler verursacht.

Kurve 7 wurde wiederum mit allen Komponenten wie Kurve 2 berechnet, jedoch wurde für die Wassertiefe die Tiefe h_w in Bachmitte verwendet. In diesem Fall stimmt nun auch nicht mehr die Phasenlage der Kurve mit Kurve 1 überein, das Maximum wird bereits um 12^{00} Uhr ereicht und beträgt nur 1.97°C.

Kurve 8 schließlich ist identisch mit Kurve 1 in der Abbildung 41,2 und zeigt nochmals einen Temperaturverlauf, der mit dem Kanalmodell berechnet wurde. Die Differenz zwischen den Kurven 7 und 8 wird von der beim Kanalmodell größeren Wassertiefe und dem beim Trapezprofilmodell zusätzlichen Bodenwärmestrom bewirkt.

Damit kann als Ergebnis dieser Arbeit festgestellt werden, daß es für eine möglichst genaue Berechnung der Wassertemperatur des Vernagtbaches erforderlich ist, das hydrologische Verhalten der sieben Bäche im Gletschervorfeld modellmäßig nachzubilden und naturähnliche Annahmen für die Dispersion zu machen. Ein Kanalmodell erfüllt die gestellte Aufgabe nicht. Es kann jedoch die Strahlungsbilanz, der Strom fühlbarer und latenter Wärme sowie die Energiedissipation nach üblichen Methoden berechnet werden, wobei sich die Aufspaltung der Globalstrahlung in direkte und diffuse Strahlung erübrigt, weil die Abschattung des Geländes in diesem Fall keine Rolle spielt. Ebenso können der Bodenwärmestrom zum Bachbett wegen Erwärmung der außerhalb des Baches gelegenen Bodenoberfläche und der Wärmestrom zwischen Wasser und Boden wegen Änderung der Wassertemperatur und damit die konforme Abbildung des Bachbettprofils vernachlässigt beziehungsweise pauschal mit 0.1 Kelvin berücksichtigt werden, wobei dieser Betrag je nach Jahreszeit positiv oder negativ anzusetzen ist.

Dieses Trapezprofilmodell liefert dann Wassertemperaturen, die während des Tages bis auf 0.25 Kelvin mit gemessenen Werten übereinstimmen können.

7 Anhang

7.1 Errorfunktion, Exponentialintegral

Die Gauß'sche Fehlerfunktion (Gauß'sches Wahrscheinlichkeitsintegral) ist definiert als

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2/2} d\xi .$$

In dieser Arbeit wird stets das Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsintegral $\Phi(x\sqrt{2})$ an der Stelle $x\sqrt{2}$ verwendet, welches dann als die Errorfunktion

$$\mathrm{erf}[x] = \Phi(x\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

bezeichnet wird. Die Benennung ist in der Literatur nicht einheitlich, so bezeichnen z.B. Gröber, Erk, Grigull, 1961 die Errorfunktion erf(x) als das Gauß'sche Fehlerintegral.

Die Errorfunktion hat einen ähnlichen Verlauf wie der Tangens hyperbolikus und kann nach entsprechender Anpassung des Arguments leicht durch diesen approximiert werden:

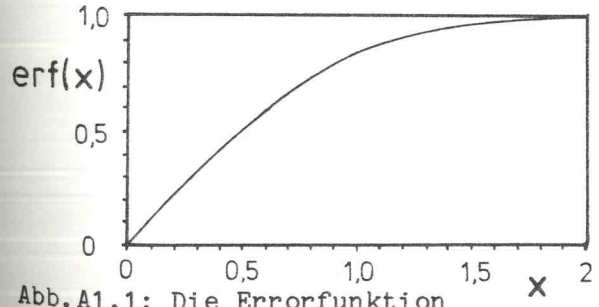


Abb. A1,1: Die Errorfunktion

$$x < 0{,}8: \quad \mathrm{erf}(x) \approx \tanh(1{,}15x)$$

$$x > 0{,}8: \quad \mathrm{erf}(x) \approx \tanh(1{,}22x) .$$

Die Errorfunktion ist eine unsymmetrische Funktion, so daß gilt

$$\mathrm{erf}[-x] = -\mathrm{erf}[x] .$$

Häufig wird die zum Wert 1 komplementäre Funktion verwendet,

$$\mathrm{erfc}[x] = 1 - \mathrm{erf}[x] .$$

In der Gauß'schen Normalverteilung wird durch die Errorfunktion die Fläche zwischen der Ordinate und $\xi = x$ bestimmt.

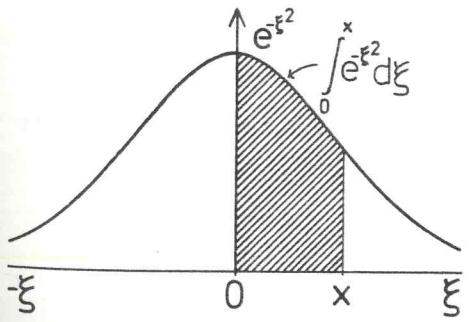


Abb. A1,2: Die Normalverteilungskurve

Das Exponentialintegral wird definiert als

$$-\,Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}\, d\xi$$

und hat den in Abbildung A 2,1 gezeigten Verlauf.

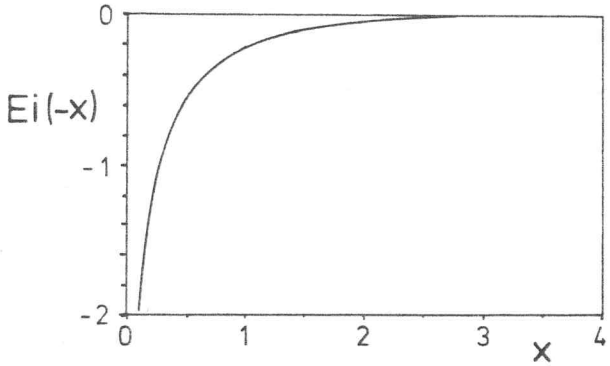


Abb.A 2,1 : Exponentialintegral

Für Ei(-x) gilt die Reihenentwicklung

$$Ei(-x) = C + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!} \quad ,$$

Eulersche Konstante C = 0,577216...

wobei x positiv reell zu wählen ist.

Für $0<x<\infty$ führt dies zur Reihe

$$Ei(-x) = C + \ln x - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^5}{600} + \frac{x^6}{4320} - \frac{x^7}{35280} + \frac{x^8}{322560} - \frac{x^9}{3265920} + \frac{x^{10}}{3{,}6288\,E7} \quad .$$

Bei $x > 2$ gilt ferner

$$Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{-x}\left\{0{,}9999965 - \frac{0{,}9989710}{x} + \frac{1{,}9487646}{x^2} - \frac{4{,}9482092}{x^3} + \frac{11{,}7850792}{x^4} - \frac{20{,}4523840}{x^5} + \frac{21{,}491469}{x^6} - \frac{9{,}5240410}{x^7} \pm 0{,}35E{-}5\right\}$$

Für $x \gg 1$ kann außerdem die asymptotische Darstellung

$$Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{-x}\left\{1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + - \cdots\right\}$$

verwendet werden.

Bei den Berechnungen dieser Arbeit finden folgende Integrale Verwendung:

$$\mathrm{erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\mathrm{erfc}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\int_0^x e^{-a^2/\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{x}\, e^{-\frac{a^2}{x}} - 2a\sqrt{\pi}\, \mathrm{erfc}\left[\frac{a}{\sqrt{x}}\right]$$

$$\int_0^x \mathrm{erf}\left[\frac{c}{\sqrt{\xi}}\right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{x}\, \mathrm{erf}\left[\frac{c}{\sqrt{x}}\right] - \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \mathrm{Ei}\left(-\frac{c^2}{x}\right)$$

$$\int \mathrm{Ei}(-ax)\,dx = x\,\mathrm{Ei}(-ax) - \frac{1 - e^{-ax}}{a}$$

7.2 Anwendungsbeispiel der konformen Abbildung

Für die praktische Durchführung der Abbildung eines Rechteckkanals resultiert das folgende Verfahren, wobei aus Symmetriegründen nur die rechte Kanalhälfte behandelt wird:

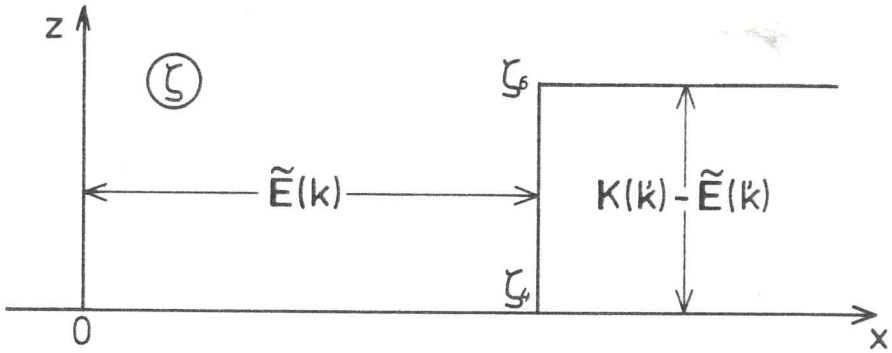


Abb.A4,1: Die vollständigen elliptischen Integrale im Kanalprofil

Punkte ζ auf der Strecke $0 \ldots \zeta_4$ werden in der η-Ebene auf Punkte der Strecke $0 \ldots 1$ abgebildet. Die gesamte Strecke $0 \ldots \zeta_4$ ist durch

$$0 \ldots \zeta_4 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2\eta^2}{1-\eta^2}}\, d\eta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \tilde{E}(k)$$

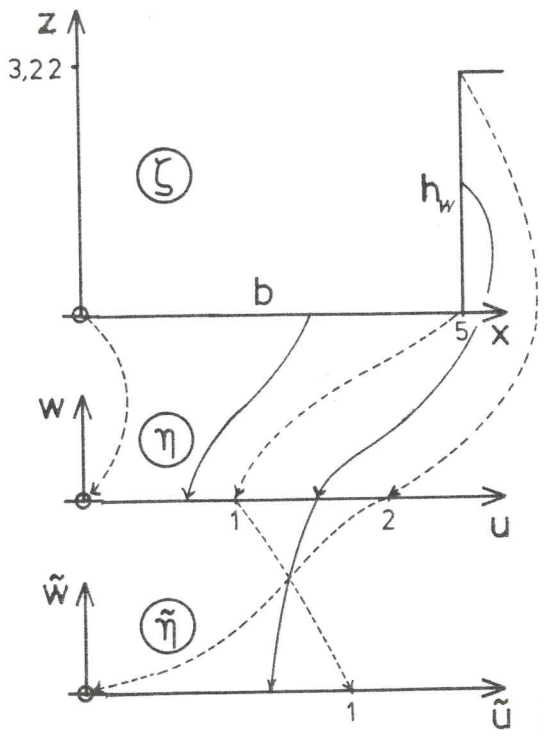
gegeben. Punkte auf der Strecke $\zeta_4 \ldots \zeta_6$ finden sich in der $\tilde{\eta}$-Ebene durch Punkte auf der Strecke 1....0 repräsentiert. Die gesamte Strecke $\zeta_4 \ldots \zeta_6$ ergibt sich zu

$$\zeta_4 \ldots \zeta_6 = -i \int_1^0 \frac{k'^2 \tilde{\eta}^2\, d\tilde{\eta}}{\sqrt{1-\tilde{\eta}^2}\,\sqrt{1-k'^2\tilde{\eta}^2}} = i\left[K(k') - \tilde{E}(k')\right]$$

Aus dem Seitenverhältnis von Kanalhöhe h_w zu halber Kanalbreite b ist dann der Quotient

$$\frac{h_w}{b} = \frac{K(k') - \tilde{E}(k')}{\tilde{E}(k)}$$

eindeutig bestimmbar, wie Abbildung A4,1 zeigt.



Als Beispiel sei das Seitenverhältnis eines Kanals mit h_w/b = 0.644 und die Kanalbreite 2b = 10 m gegeben. Aus einer Tabelle der vollständigen elliptischen Integrale wird dann entnommen, daß dieses Verhältnis genau bei

$$k = 0{,}500 \quad \hat{=} \quad \alpha_k = \pi/6$$

und

$$k' = 0{,}866 \quad \hat{=} \quad \alpha_k = \pi/3$$

gegeben ist. Denn es ist

$$\left.\begin{aligned} \tilde{E}(k) &= \tilde{E}(0{,}5) = 1{,}4675 \\ K(k') &= K(0{,}866) = 2{,}1565 \\ \tilde{E}(k') &= \tilde{E}(0{,}866) = 1{,}2111 \end{aligned}\right\} \frac{h_w}{b} = \frac{2{,}1565 - 1{,}2111}{1{,}4675} = 0{,}644$$

Wegen k = 0.5 wird die Ecke ζ_6 in $\eta = a = 1/k = 2$ abgebildet, da ja ζ_4 auf $\eta = 1$ normiert wurde. $\tilde{E}(k) = 1.4675$ entspricht der halben Kanalbreite von 5m, so daß sich von den elliptischen Integralen zur Realität ein Maßstabsfaktor

$$A^* = 5/1{,}4675 = 3{,}407$$

einstellt. A^* wird neu eingeführt und soll im früheren Ähnlichkeitsfaktor $A = A^* k$ enthalten sein. Diese Änderung berührt die bisherigen Herleitungen nicht.

Dem Punkt $\eta = 1$ entspricht in der $\tilde{\eta}$-Ebene der Punkt $\tilde{\eta} = 1$ ($\hat{=}\Phi = \pi/2$), wobei mit

$$E(k',\Phi) = E(0{,}866, \pi/2) = \tilde{E}(0{,}866) = 1{,}2111$$

und

$$F(k',\Phi) = F(0{,}866, \pi/2) = K(0{,}866) = 2{,}1565$$

das imaginäre

$$\zeta = i\,A^* \left\{ \left[E(k',\Phi) - F(k',\Phi) \right] - \left[\tilde{E}(k') - K(k') \right] \right\} = 0$$

tatsächlich verschwindet und auch der Punkt $\tilde{\eta} = 0$ ($\hat{=}\Phi = 0$) mit $E(k',\Phi) = 0$ und $F(k',\Phi) = 0$ in

$$\zeta = i\,A^* \left\{ [0 - 0] - [1{,}211 - 2{,}1565] \right\} = i\,3{,}22$$

übergeht. Um jetzt beliebige Bildpunkte η, $1 < \eta < 2$ der Urpunkte $\zeta, 0 < \zeta <$ 3.22 zu erhalten, ermittelt man am einfachsten für laufende Winkel ϕ, $0 < \phi < \pi/2$ die zugehörigen ζ-Werte und entnimmt dann der so konstruierten Kurve das gesuchte Punktepaar.

Tab.10: Punktweise Berechnung für die senkrechte Kanalwand

ϕ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$F(k,\phi)$	0	0.175	0.355	0.542	0.744	0.965	1.213	1.494	1.813	2.157
$E(k,\phi)$	0	0.174	0.344	0.506	0.658	0.795	0.918	1.027	1.123	1.211
$Z=(E-F)+(K-\tilde{E})$	0.945	0.944	0.935	0.909	0.859	0.776	0.651	0.478	0.255	0
$i\zeta = i\mathbb{A}^* Z$	3.221	3.217	3.185	3.098	2.928	2.644	2.219	1.525	0.870	0
$\tilde{\eta} = \sin\phi$	0	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985	1.000
$\eta = \sqrt{\frac{1-(k\tilde{\eta})^2}{k^2}}$	2.000	1.977	1.910	1.803	1.660	1.497	1.323	1.162	1.044	1.000
$\eta\mathbb{A}^*$	6.814	6.737	6.508	6.143	5.656	5.101	4.508	3.959	3.557	3.407

Die letzte Zeile gibt schließlich Werte $\eta\mathbb{A}^*$ in der Einheit m an, die im gleichen Masstab wie die ζ-Werte direkt mit diesen vergleichbar sind. Die folgende Abbildung A6,1 zeigt die aus Tabelle 10 gewonnene Kurve.

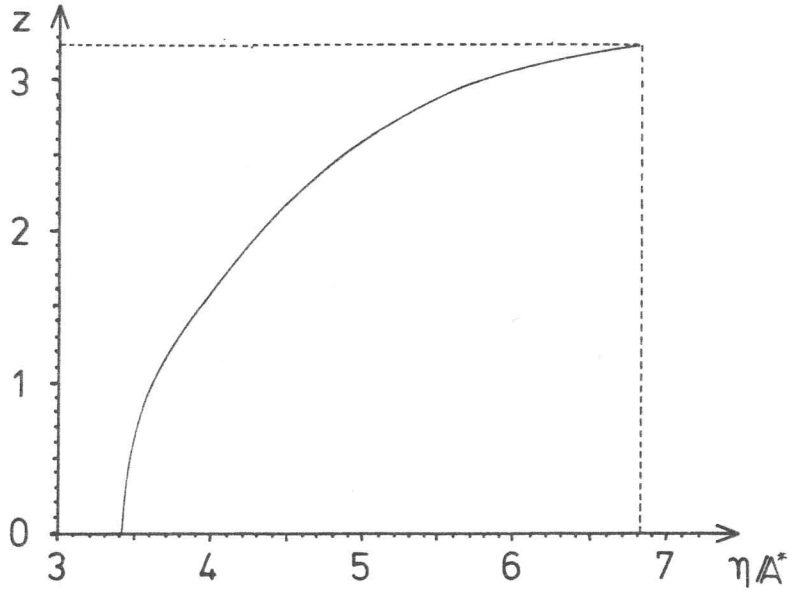


Abb.A6,1 : Konforme Abbildung von Punkten der senkrechten Kanalwand auf die reelle Achse der η-Ebene

Zum Vergleich wird jetzt noch der Bereich ζ, $0<\zeta<\zeta_4$ auf η, $0<\eta<1$ abgebildet. Mit k = 0.5 ($\hat{=}\ \alpha_k = \pi/6$) folgt aus der Gleichung [108] die Tabelle 11.

Tab.11: Punktweise Berechnung für den Kanalboden

φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$E(k,\varphi)$	0	0.174	0.347	0.518	0.685	0.848	1.008	1.163	1.316	1.468
$\mathbb{A}^* E$	0	0.594	1.183	1.764	2.334	2.890	3.433	3.963	4.484	5.000
$\eta\,\mathbb{A}^*$	0	0.591	1.165	1.704	2.190	2.610	2.951	3.201	3.355	3.407

Analog zur Abbildung A6,1 läßt sich das Ergebnis der Tabelle 11 graphisch in Abbildung A7,1 darstellen.

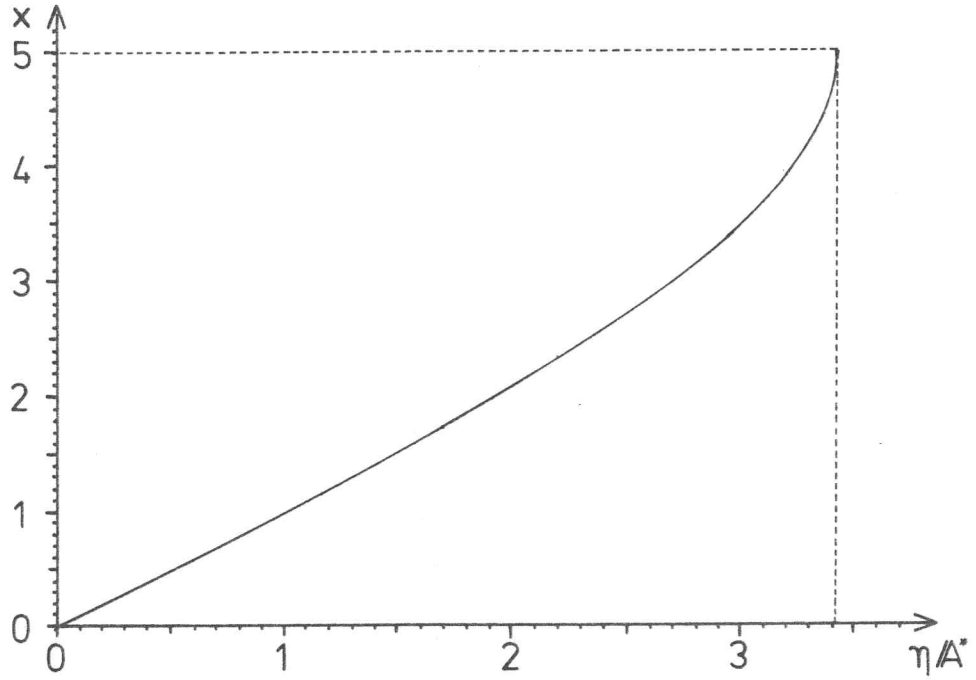


Abb.A7,1: Konforme Abbildung von Punkten des halben Kanalbodens auf die reelle η-Achse

Die beiden Abbildungen A6,1 und A 7,1 lassen sich in eine stetige Kurve zusammensetzen, wie in Abbildung A 8,1 gezeigt wird.

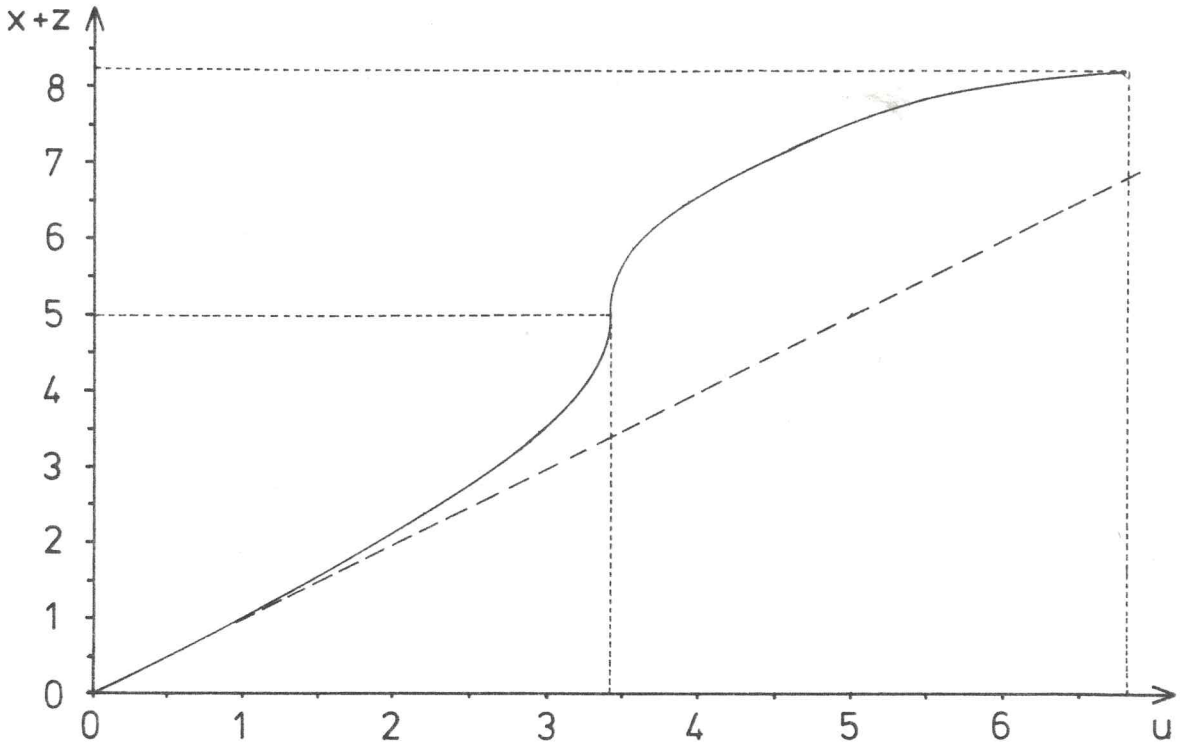


Abb.A 8,1 : Konforme Abbildung des halben Kanalprofiles in die reelle Achse der η -Ebene

Der Abbildung A8,1 können nun beliebige Punktepaare für die konforme Abbildung des Kanalprofils (———) entnommen werden. Berechnungen in der η -Ebene, die den Wert η_i verwenden, gelten ebenso in der ζ-Ebene mit Bezug auf den Wert ζ_i.

Ein Profil mit $\beta = 90°$ geht bei der konformen Abbildung in sich selbst über. Diesem Fall entspricht die Gerade $\zeta = \eta$. Abbildungen für alle Profilwinkel $0° < \beta < 90°$ werden im Bereich zwischen der Kurve und der Geraden auf einer Parallelen zur Abszisse zu suchen sein.

7.3 Ausgangsdaten und Ergebnisse in Zahlen

Tabelle 12 gibt die Stundenwerte der Globalstrahlung G, der Gegenstrahlung A, der Lufttemperatur ϑ_L, der Windgeschwindigkeit v_L, der relativen Luftfeuchte f_L und der Durchflußmenge DM an der Pegelstation an.

Tabelle 12: Meteorologische Daten an der Pegelstation am 19.8.1978

Zeit	G	A	ϑ_L	v_L	f_L	DM
h	W/m^2	W/m^2	°C	m/s	%	m^3/s
0	0	247.5	4.5	3.9	51.4	0.983
1	0	244.6	4.0	3.4	50.9	0.944
2	0	244.7	4.2	3.1	49.7	0.919
3	0	242.5	3.8	2.3	49.5	0.907
4	0	241.7	3.8	2.7	48.9	0.870
5	7.8	241.6	3.8	3.7	48.8	0.870
6	19.6	243.1	4.2	3.7	47.1	0.870
7	35.2	246.3	4.6	3.7	48.2	0.870
8	481.6	258.4	6.9	4.4	46.4	0.870
9	653.9	264.6	8.0	4.3	45.8	0.870
10	798.8	270.2	9.0	4.2	45.5	0.894
11	892.7	273.5	9.5	4.2	45.6	1.009
12	943.6	276.0	9.9	4.0	45.9	1.211
13	928.0	280.1	10.5	3.7	46.5	1.367
14	873.2	284.3	11.1	3.7	46.7	1.486
15	763.5	283.7	11.0	3.9	47.1	1.562
16	610.8	281.2	10.4	3.6	48.8	1.593
17	47.0	279.1	9.8	3.3	50.5	1.532
18	31.3	274.1	8.6	4.0	54.8	1.441
19	15.7	270.3	7.6	4.3	59.2	1.324
20	3.0	267.2	6.8	4.2	62.7	1.267
21	0	264.6	6.0	4.0	67.3	1.210
22	0	262.1	5.3	4.2	70.4	1.141
23	0	258.5	5.2	4.9	63.6	1.087
24	0	267.0	5.2	4.9	61.5	1.034

Die über alle 90 Integrationspunkte des Bachsystems gemittelten Energiebilanzwerte sind in Tabelle 13 aufgeführt. Diese sind die zur Wasseroberfläche senkrechten Komponenten der Globalstrahlung $\overline{G'}$ und der tatsächlich absorbierten Globalstrahlung $\overline{G''}$, die Strahlungsbilanz $\bar{Q}$, der Strom fühlbarer und latenter Wärme $\bar{L}$ und $\bar{V}$, die Energiedissipation $\bar{P}$ sowie die Bodenwärmeströme $\overline{B1}$, $\overline{B2}$, $\overline{B3}$ und deren Summe $\bar{B}$.

Die Dissipation wurde mit der Tiefe in Bachmitte h_w, der mittleren Tiefe $\bar{h}_w$ und der reduzierten Tiefe h_r berechnet. Der Bodenwärmestrom B1 bezeichnet den Wärmefluß zum Bachbett wegen Erwärmung der außerhalb des Bachbettes gelegenen Bodenoberfläche, B2 den Wärmestrom zwischen Wasser und Boden wegen Änderung der Wassertemperatur und B3 die Wärmeentnahme aus dem Boden wegen Überflutung des Ufers.

Tabelle 13: Die gemittelten Energiebilanzterme in W/m^2, die Zeit in h.

Zeit	$\overline{G'}$	$\overline{G''}$	$\bar{Q}$	$\bar{L}$	$\bar{V}$	$\bar{P}(h_w)$	$\bar{P}(\bar{h}_w)$	$\bar{P}(h_r)$	$\overline{B1}$	$\overline{B2}$	$\overline{B3}$	$\bar{B}$
1	.0	.0	-66.3	58.9	-27.7	235.3	151.8	147.8	29.4	.5	.0	28.9
2	.0	.0	-68.1	56.4	-31.2	230.0	151.2	147.8	29.4	.5	.0	28.9
3	.0	.0	-70.2	54.4	-31.9	226.3	150.9	147.9	29.3	.4	.0	28.9
4	.0	.0	-70.9	53.4	-33.9	222.6	150.8	148.2	29.2	.4	.0	28.8
5	6.2	6.2	-64.8	53.3	-34.3	220.8	150.9	148.4	29.1	.5	.0	28.6
6	44.1	44.1	-25.8	53.8	-36.9	218.9	151.0	148.8	29.2	.9	.0	28.2
7	67.6	67.6	.6	59.5	-32.3	217.0	151.3	149.2	29.3	1.4	.0	28.0
8	234.7	187.5	131.4	73.8	-33.9	217.0	151.3	149.2	30.3	3.0	.0	27.3
9	385.6	339.4	288.2	82.9	-29.9	217.0	151.3	149.2	31.5	4.8	.0	26.8
10	527.9	481.5	434.5	89.7	-26.4	221.5	150.9	148.3	33.0	6.7	30.3	56.6
11	631.9	587.4	541.8	91.3	-26.2	241.5	152.9	148.2	34.5	9.2	158.6	183.9
12	685.0	639.4	594.2	88.4	-26.7	275.1	160.2	151.0	35.9	12.1	356.0	379.8
13	655.5	604.7	563.1	90.6	-21.2	298.4	167.3	154.5	36.8	12.7	424.7	448.8
14	577.0	516.6	479.1	98.1	-15.8	315.2	173.2	157.6	37.6	12.5	469.9	495.0
15	449.5	375.9	338.6	100.7	-14.4	325.6	177.1	159.8	37.7	11.5	488.8	515.0
16	289.6	202.9	164.6	94.1	-11.6	329.7	178.7	160.7	37.3	9.8	475.5	503.0
17	94.1	57.3	18.8	89.3	-7.7	321.5	175.6	158.9	36.2	7.6	360.6	389.2
18	45.3	45.3	3.7	87.6	-3.3	309.0	170.9	156.4	35.2	5.7	157.3	186.9
19	12.6	12.6	-32.3	75.2	-1.7	293.0	165.5	153.6	34.3	5.1	129.3	158.6
20	3.1	3.1	-44.1	71.5	2.1	281.1	161.8	151.7	33.4	4.3	56.3	85.4
21	.0	.0	-49.3	67.2	6.6	268.7	158.5	150.2	32.6	4.0	14.7	43.3
22	.0	.0	-52.6	64.4	10.2	257.5	156.1	149.3	31.8	3.8	.0	28.0
23	.0	.0	-58.4	61.6	-3.5	249.2	154.7	149.1	31.1	3.6	.0	27.5
24	.0	.0	-63.0	60.0	-24.9	257.5	156.1	148.1	30.7	3.5	.0	27.3

In Tabelle 14 ist die meßbare Tiefe in Bachmitte h_w , die über den Fließquerschnitt gemittelte Tiefe $\bar{h}_w$ und die reduzierte Tiefe h_r jeweils am Ende der sieben Bäche aufgelistet. h_w ist im Ausdruck als HB, $\bar{h}_w$ als HM, h_r als HR und die Zeit als T bezeichnet.

Tabelle 14: Die Wassertiefen der Bäche am Ende ihres Laufes

Bach Nr.		1	2	3	4	5	6	7
T = 1	HB=	.070	.123	.153	.176	.047	.225	.195
	HM=	.045	.062	.081	.083	.042	.142	.173
	HR=	.044	.060	.078	.082	.042	.136	.173
T = 2	HB=	.069	.120	.150	.173	.045	.220	.190
	HM=	.046	.063	.082	.088	.041	.140	.169
	HR=	.045	.061	.080	.087	.041	.135	.169
T = 3	HB=	.067	.118	.148	.171	.044	.216	.186
	HM=	.046	.064	.084	.093	.040	.139	.166
	HR=	.046	.062	.082	.092	.040	.134	.166
T = 4	HB=	.066	.117	.146	.168	.044	.213	.183
	HM=	.047	.064	.085	.098	.039	.137	.163
	HR=	.047	.063	.084	.098	.039	.133	.163
T = 5	HB=	.066	.116	.145	.167	.043	.211	.181
	HM=	.047	.065	.086	.102	.039	.137	.161
	HR=	.047	.063	.085	.101	.039	.133	.161
T = 6	HB=	.065	.115	.144	.166	.043	.209	.179
	HM=	.048	.065	.087	.106	.039	.136	.160
	HR=	.048	.064	.086	.105	.039	.132	.160
T = 7	HB=	.064	.114	.142	.164	.042	.208	.177
	HM=	.048	.066	.088	.110	.038	.135	.158
	HR=	.048	.065	.087	.110	.038	.132	.158
T = 8	HB=	.064	.114	.142	.164	.042	.208	.177
	HM=	.048	.066	.088	.110	.038	.135	.158
	HR=	.048	.065	.087	.110	.038	.132	.158
T = 9	HB=	.064	.114	.142	.164	.042	.208	.177
	HM=	.048	.066	.088	.110	.038	.135	.158
	HR=	.048	.065	.087	.110	.038	.132	.158
T =10	HB=	.066	.116	.145	.167	.043	.212	.182
	HM=	.047	.065	.086	.100	.039	.137	.162
	HR=	.047	.063	.084	.100	.039	.133	.162
T =11	HB=	.072	.125	.157	.180	.048	.230	.202
	HM=	.045	.062	.080	.079	.043	.144	.178
	HR=	.044	.059	.077	.077	.043	.138	.178
T =12	HB=	.082	.140	.175	.198	.056	.263	.237
	HM=	.044	.061	.077	.070	.040	.158	.206
	HR=	.041	.055	.071	.064	.040	.146	.206
T =13	HB=	.089	.149	.187	.210	.062	.286	.263
	HM=	.044	.063	.078	.069	.039	.168	.226
	HR=	.040	.055	.069	.060	.038	.152	.226
T =14	HB=	.093	.156	.196	.218	.066	.303	.283
	HM=	.045	.064	.080	.069	.039	.175	.240
	HR=	.040	.054	.069	.059	.037	.157	.240
T =15	HB=	.096	.160	.201	.222	.068	.313	.295
	HM=	.046	.065	.081	.070	.039	.180	.249
	HR=	.040	.055	.069	.058	.037	.159	.249
T =16	HB=	.097	.162	.203	.224	.069	.318	.300
	HM=	.046	.065	.081	.070	.039	.182	.253
	HR=	.040	.055	.069	.058	.037	.160	.253

T =17	HB=	.095	.159	.199	.220	.067	.309	.290
	HM=	.045	.065	.080	.070	.039	.178	.246
	HR=	.040	.055	.069	.058	.037	.158	.246
T =18	HB=	.092	.154	.193	.215	.064	.297	.276
	HM=	.045	.063	.079	.069	.039	.172	.235
	HR=	.040	.054	.069	.059	.037	.155	.235
T =19	HB=	.087	.147	.184	.207	.061	.281	.257
	HM=	.044	.062	.078	.069	.039	.165	.221
	HR=	.040	.055	.069	.061	.038	.151	.221
T =20	HB=	.084	.142	.178	.201	.058	.269	.244
	HM=	.044	.061	.077	.069	.040	.160	.211
	HR=	.041	.055	.070	.062	.039	.148	.211
T =21	HB=	.080	.137	.172	.195	.055	.257	.230
	HM=	.044	.061	.077	.071	.041	.155	.200
	HR=	.041	.056	.071	.065	.041	.145	.200
T =22	HB=	.077	.132	.166	.189	.052	.246	.218
	HM=	.044	.061	.078	.073	.043	.151	.191
	HR=	.042	.057	.073	.069	.043	.142	.191
T =23	HB=	.074	.129	.161	.185	.050	.238	.210
	HM=	.044	.061	.078	.076	.045	.147	.184
	HR=	.043	.058	.075	.072	.045	.140	.184
T =24	HB=	.072	.125	.156	.180	.048	.230	.201
	HM=	.045	.062	.080	.080	.043	.144	.177
	HR=	.044	.059	.077	.077	.043	.138	.177

Die Bäche benetzen an ihren letzten Integrationspunkten die in Tabelle 15 genannnten Bachsohlenbreiten 2b.

Tabelle 15: Die Sohlenbreiten der Bäche am Ende ihres Laufes
Die Zeit ist in h, die Breite 2b in m angegeben.

Zeit	Bach Nr. 1	2	3	4	5	6	7
1	1.933	2.878	3.291	4.218	1.272	2.737	4.743
2	1.839	2.739	3.113	3.833	1.265	2.679	4.711
3	1.774	2.644	2.991	3.562	1.260	2.640	4.690
4	1.709	2.546	2.866	3.277	1.255	2.600	4.669
5	1.675	2.496	2.802	3.130	1.252	2.580	4.658
6	1.641	2.446	2.737	2.977	1.249	2.560	4.648
7	1.607	2.395	2.671	2.821	1.247	2.540	4.637
8	1.607	2.395	2.671	2.821	1.247	2.540	4.637
9	1.607	2.395	2.671	2.821	1.247	2.540	4.637
10	1.689	2.516	2.827	3.189	1.253	2.588	4.663
11	2.040	3.035	3.492	4.640	1.281	2.803	4.779
12	2.608	3.868	4.545	6.730	1.658	3.178	4.988
13	2.989	4.421	5.239	8.033	1.974	3.445	5.141
14	3.259	4.810	5.726	8.925	2.195	3.639	5.254
15	3.423	5.047	6.022	9.459	2.329	3.760	5.326
16	3.488	5.141	6.139	9.670	2.382	3.808	5.355
17	3.359	4.955	5.906	9.251	2.277	3.712	5.298
18	3.159	4.666	5.546	8.596	2.113	3.566	5.212
19	2.902	4.294	5.081	7.739	1.902	3.383	5.105
20	2.707	4.011	4.725	7.073	1.740	3.246	5.026
21	2.502	3.713	4.349	6.355	1.570	3.106	4.947
22	2.313	3.437	4.001	5.673	1.412	2.980	4.876
23	2.172	3.230	3.739	5.147	1.293	2.888	4.825
24	2.025	3.013	3.463	4.581	1.280	2.794	4.774

Den Kurvendarstellungen der Abbildungen 94,1 beziehungsweise 95,1 liegen die Rechenergebnisse der Tabelle 16 zugrunde. Die Spaltenbezifferung ist identisch mit der Kurvennummerierung. Ziffer 2 bis 7 sind Ergebnisse des Trapezprofilmodells. Es bedeuten :

1: die gemessene Wassertemperatur an der Pegelstation

berechnet:

2: mit B1, B2, B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r

3: mit B2, B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r

4: mit B3, Abschattung und reduzierter Tiefe h_r

5: mit Abschattung und reduzierter Tiefe h_r

6: mit B1, B2, B3, Abschattung und mittlerer Tiefe $\bar{h}_w$

7: mit B1, B2, B3, Abschattung und Tiefe in Bachmitte h_w

8: Kanalmodell, Kurve 1 in Abbildung 41,2

Tabelle 16: Wassertemperaturen an der Pegelstation

Zeit	Ziffer: 1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.1	0.278	0.278	0.278	0.278	0.281	0.319	0.363
2	0.05	0.338	0.265	0.265	0.265	0.339	0.360	0.356
3	0.05	0.331	0.258	0.258	0.258	0.332	0.354	0.352
4	0.05	0.323	0.251	0.250	0.250	0.324	0.347	0.347
5	0.0	0.322	0.250	0.249	0.249	0.323	0.345	0.346
6	0.0	0.429	0.357	0.359	0.359	0.429	0.426	0.392
7	0.05	0.559	0.486	0.489	0.489	0.558	0.527	0.449
8	0.5	0.929	0.854	0.882	0.882	0.925	0.812	0.617
9	1.4	1.375	1.298	1.310	1.310	1.368	1.153	0.811
10	2.1	1.868	1.787	1.805	1.731	1.854	1.496	0.978
11	2.8	2.532	2.448	2.475	2.048	2.482	1.798	1.031
12	3.2	3.205	3.118	3.154	2.199	3.048	1.966	0.976
13	3.4	3.309	3.221	3.258	2.121	3.077	1.897	0.897
14	3.2	3.222	3.134	3.170	1.917	2.948	1.778	0.811
15	2.9	2.905	2.818	2.851	1.551	2.634	1.580	0.704
16	2.5	2.397	2.311	2.361	1.100	2.169	1.321	0.583
17	1.6	1.711	1.627	1.579	0.645	1.569	1.006	0.491
18	1.2	1.133	1.050	1.065	0.665	1.067	0.769	0.483
19	0.9	0.853	0.771	0.784	0.540	0.820	0.638	0.428
20	0.8	0.662	0.581	0.592	0.502	0.648	0.552	0.426
21	0.7	0.554	0.474	0.484	0.476	0.549	0.500	0.426
22	0.7	0.518	0.438	0.448	0.448	0.515	0.484	0.427
23	0.5	0.472	0.394	0.403	0.403	0.471	0.456	0.412
24	0.3	0.411	0.333	0.342	0.342	0.411	0.415	0.391

7.4 Symbolliste

A	Gegenstrahlung
A_i	Temperaturamplituden
Az	Sonnenazimut
A'	Austauschkoeffizient
$\mathbb{A}$	komplexe Konstante
A^*	Maßstabsfaktor
R, R_i	Querschnittsfläche des Wassers senkrecht zur Fließrichtung
B	Bodenwärmestrom
$\mathbb{B}$	komplexe Konstante
CAZ	zur West-Ost-Richtung komplementärer Winkel des Sonnenazimuts
DM	Durchflußmenge
D	Tag des Datums
D_g	gleichwertiger Rohrdurchmesser
E	terrestrische Ausstrahlung
E_L, E_W	Sättigungsdampfdruck von Luft, Wasser
E_P	potentielle Energie
E_t^z	Abkürzung für $\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\varkappa(t-0,5)}}\right)$
$E(k,\Phi)$	elliptisches Integral 2.Gattung
$\tilde{E}(k)$	vollständiges elliptisches Integral 2.Gattung
Fr	Froude - Zahl
$F(k,\Phi)$	elliptisches Integral 1.Gattung
G	Globalstrahlung
G_{max}	maximal mögliche Globalstrahlung auf eine horizontale Fläche
H	diffuse Himmelsstrahlung
H_{max}	maximal mögliche Himmelsstrahlung auf eine horizontale Fläche
I	direkte Sonnenstrahlung auf eine horizontale Fläche
I_e	extraterrestrische solare Strahlung
I_{max}	maximal mögliche solare Strahlung auf eine horizontale Fläche
I_s	solare Strahlung senkrecht auf eine ebene Fläche

$J_E, J_{E,R}$ Energieliniengefälle, ~ Rohr

J_O Gefälle des Wasserspiegels

J_S Sohlengefälle

$K(k)$ vollständiges elliptisches Integral 1.Gattung

L Strom fühlbarer Wärme

M Monatszahl, beginnt mit März = 3 bis Februar = 14

O, O_i Grenzflächen Wasser-Luft

P Energiedissipation

P_B Bachpunkt mit Koordinaten x_B, y_B, z_B

P_i Eckpunkte der Abschattungswand

$P_\odot$ Schnittpunkt der Verbindung Bachelement-Sonne mit der Profillinie der Abschattung in Aufsicht

Q Strahlungsbilanz

R Reflexstrahlung

Re, Re_R Reynoldszahl, ~ Rohr

$S_{i..j}$ Streckenabschnitte der senkrechten Projektion einer Profillinie

T_L Lufttemperatur

$T_{\tau,(j)}$ Bodenoberflächentemperaturen zum Zeitpunkt τ, (j)

T_m Mitteltemperatur der T_j in t_{per}

$T_{w,\emptyset}$ Anfangstemperatur des Wasserelementes

T_w Wassertemperatur

T_0 Anfangstemperatur des Bodens

T_c Endtemperatur des Bodens

$T(z,t)$ Bodentemperatur in der Tiefe z, zur Zeit t

T_{WB} Temperatur der Grenzschicht Wasser-Boden

$\hat{T}$ Linkes Trübungsfaktor

$\bar{\hat{T}}$ Jahresmittel von $\hat{T}$

U Umfang der benetzten Gerinnesohle

V Strom latenter Wärme

V Volumen

W Wärmeinhalt des Einheitswasservolumens

a Punkt auf der reellen Achse der η-Ebene

a'_i Fourierkoeffizient

b halbe Bachbreite, Kanalmodell

b_0 Breite Bachmitte bis Wasserrand

b_K	Breite Bachmitte bis Knick
b_S	halbe Sohlenbreite
b'_i	Fourierkoeffizient
$\hat{b}$	Extinktionskoeffizient
b_W, b_B	Wärmeeindringzahlen in Wasser, ~ Boden
c_B	spezifische Wärmekapazität des Bodens
c_i	Konstanten, i=0,1,2,...
c_P	spezifische Wärmekapazität der Luft
c_W	spezifische Wärmekapazität des Wassers
d	Rohrdurchmesser
e_L	Dampfdruck der Luft
f	Formparameter
f_L	relative Feuchtigkeit der Luft
g	Schwerebeschleunigung
g_S	Faktor bei der Sonnenscheindauer
h_f	hydraulischer Radius
h_K	vertikaler Abstand Sohlenniveau - Uferknick
h_r	reduzierte Wassertiefe, Kanalmodell
h_W	Wassertiefe
$\bar{h}_W$	mittlere Wassertiefe
$h_\odot$	Sonnenhöhe
j	Index eines Reihengliedes
k	Modul des elliptischen Integrals
k'	Komodul des elliptischen Integrals
k_S	äquivalente Sandrauhigkeit
l	Ippenscher Gefälleparameter
l'	Faktor bei I_{max}
m	Masse
m'	Anzahl der Reihenglieder
n	Rauhigkeitsbeiwert nach Manning-Strickler
n'	Anzahl der gemessenen Oberflächentemperaturen
$\tilde{n}$	Quotient aus gemessener und maximal möglicher Globalstrahlung
p	Luftdruck
p_W	Wasserdruck
$q(z,t)$	Wärmestrom im Körper

r	Verdampfungsenthalpie des Wassers
s	spezifische Feuchtigkeit der Luft
$S_\odot$	relative Sonnenscheindauer
t	Zeit
t_G	Austrittszeitpunkt am Gletscher
t_P	Ankunftszeit an der Pegelstation
t_{per}	Periodendauer einer Schwingung
t_0	Zeitpunkt des 1.Temperatursprunges
u	reele Koordinate in der η-Ebene
u	kartesische Koordinate im Raum
v	kartesische Koordinate im Raum
v_L	Windgeschwindigkeit
$v_W, v_{W,i}$	Fließgeschwindigkeiten des Wassers
$\bar{v}_W$	mittlere Fließgeschwindigkeit
v_R^*	Schubspannungsgeschwindigkeit
$\tilde{w}$	Faktor beschreibt Einfluß $S_\odot$ auf I_{max}
w	imaginäre Koordinate der η-Ebene und
w	kartesische Koordinate im Raum
x, y, z	kartesische Koordinaten im Raum
$z_\odot$	Zenitdistanz der Sonne
z_0^*	Rauhigkeitshöhe
z_0	Ortshöhe des Wasserspiegels
z_S	Ortshöhe der Gerinnesohle
z_P	Druckhöhe
z_V	Geschwindigkeitshöhe
z_E	Energieverlusthöhe
α	Uferneigungswinkel
α_i	Innenwinkel der Ecke i, i=1,2,...
α_k	Modulwinkel
α_L	Wärmeübergangszahl
$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$	Winkel bis zur Ost-, Westrichtung
α'	Geschwindigkeitsbeiwert
β	Uferneigungswinkel
$\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_\odot$	Höhe der Wandpunkte P_1, P_2, $P_\odot$ vom Bachelement aus gesehen
$\delta_\odot$	Sonnendeklination

ε	relative Rauhigkeit
ε_L	terrestrischer Emissionskoeffizient
ε_i	Phasenverschiebung
ζ	komplexe Ebene $\zeta = x + iz$
ζ_i	Punkte der komplexen Ebene
η	komplexe Ebene $\eta = u + iw$
$\tilde{\eta}$	komplexe Ebene $\tilde{\eta} = \tilde{u} + i\tilde{w}$
η_H	Hangneigung
ϑ_L	Lufttemperatur in °C
$\varkappa$	Temperaturleitkoeffizient
λ_W, λ_B	Wärmeleitfähigkeit Wasser, ~ Boden
λ_t	Jahreswinkel
μ	Mikrometer, 10^{-6} m
ν	Viskosität
ν_H	Hangneigungsrichtung
π	3,1415927...
ρ_B, ρ_W	Dichte des Bodens, ~ Wassers
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante
τ	Laufvariable der Zeit
τ_R	Wandschubspannung
τ_t	Tageswinkel
φ, Φ	Winkel der Elliptischen Integrale
ω	Kreisfrequenz
$\omega_\odot$	Einfallswinkel der solaren Strahlung
Λ_G, Λ_R	Widerstandsbeiwert Gerinne, ~ Rohr
$\Phi(x)$	Gauß'sches Wahrscheinlichkeitsintegral
Φ	Winkel der elliptischen Integrale
ψ	geographische Breite

7.5 Literaturverzeichnis

Beier,N., Obermeier,A., Somieski,F.
Ein Modell zur numerischen Simulation der Temperatur eines Wohnhauses im meteorologischen Umfeld zur Untersuchung von Heizenergieeinsparungsmöglichkeiten
Univ. München - Met.Institut, Wiss.Mitteilung Nr.16 1969

Bock,J.
Einfluß der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne
Techn.Ber. Inst.f.Hydromech.u.Wasserbau Nr.2 TH Darmstadt 1966

Böhm,R.
Der Wärmehaushalt eines Flußes
Dissertation, phil. Fakultät der Univ. Wien, 1973

Carslaw,H., Jaeger,J.C.
Conduction of Heat in Solids
Clarendon Press, Oxford, England 1959

Eckel,O., Reuter,H.
Zur Berechnung des sommerlichen Wärmeumsatzes in Flußlaufen
Geografiska Annaler 1950

Escher-Vetter,H.
Der Strahlungshaushalt des Vernagtferners
Univ. München - Met.Institut, Wiss.Mitteilung Nr.39, 1980

Foitzik,L., Hinzpeter,H.
Sonnenstrahlung und Lufttrübung. Probleme der kosmischen Physik
Bd.XXXI, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1958

Geiger,R.
Das Klima der bodennahen Luftschicht
4.Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1961

Gröber,H., Erk,S., Grigull,U.
Die Grundgesetze der Wärmeübertragung
Springer Verlag, Berlin, 1961

Hofmann,G.
Mikrometeorologie, unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript
Univ. München, 1974

Marchi,E.
Il calculo della resistenza al moto uniforme nei canali
L'Energia Elletrica, 1962

Neiß,J., Winter,E.R.F.
Analyse der instationären Wärmeleitung zwischen den Wärmetauscherrohren einer Wärmepumpe und dem Erdreich.
Wärme- und Stoffübertragung 9, Springer Verlag, 1976

Sauberer,F., Dirmhirn,I.
Über den Strahlungshaushalt der Ozeane auf der Nordhalbkugel
Arch.f.Met., Geoph.u.Biokl., Serie B, Bd.6, Wien, 1955

Schröder,R.
Strömungsberechnungen im Bauwesen, Teil 1: Stationäre Strömung
Reihe Bauingenieur - Praxis, Heft 121
Verlag W.Ernst u.Sohn, Berlin - München, 1968

Schulze,R.
Strahlenklima der Erde
Dr. D.Steinkopff Verlag, Darmstadt, 1970

Witte,N.
Ein numerisches Modell des Wärmehaushalts fließender Gewässer unter Berücksichtigung thermischer Eingriffe
Wissenschaftliche Berichte des Meteorol. Institutes der Universität Karlsruhe, 1982